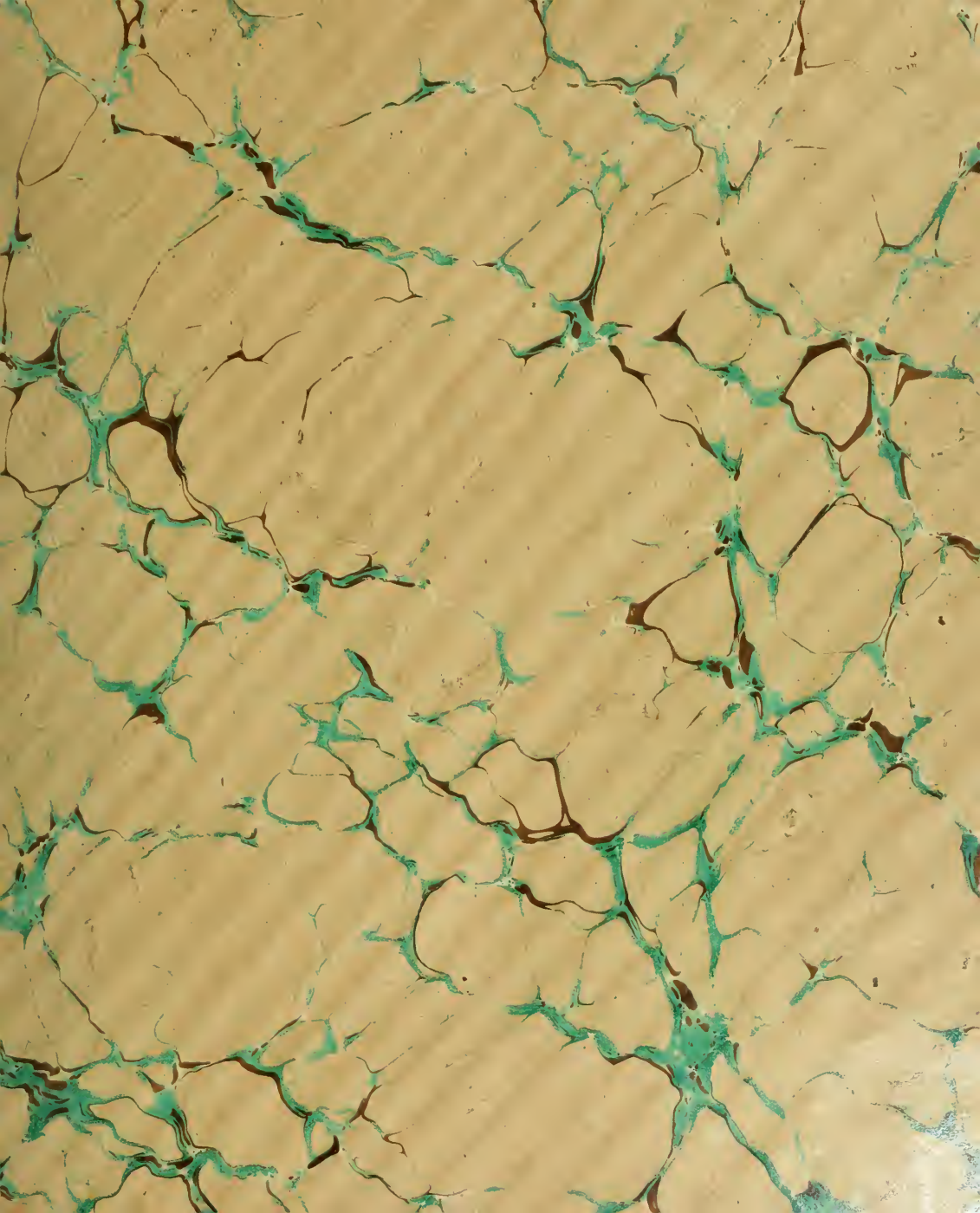


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2journaldemat17liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
quai des Augustins, 55.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XVII. — ANNÉE 1872

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1872

QH
1
J684
cop.2
v.17

20193
c.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XVII

Pages

Mémoire de Géométrie analytique; par M. *Laguerre*. 1

Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond; par M. *J. Boussinesq*. . . 55

Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle expression de la théorie de la courbure des surfaces; par M. *A. Mannheim*. 109

Sur les lois qui régissent, à une première approximation, les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque; par M. *J. Boussinesq*. 167

Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles; par M. *L. Painvin*. 177

Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle; par M. *L. Painvin*. 219

Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles de la Physique mathématique; par M. *Émile Mathieu*. 249

Funérailles de M. Duhamel. — Discours de M. Jamin. 324

Funérailles de M. E. Laugier — Discours de M. Faye. 328

Funérailles de M. E. Laugier. — Discours de M. Delaunay. 331

Funérailles de M. E. Laugier. — Discours de M. Jurien de La Gravière. . . 335

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville par M. *Maximilien Marie*. 337

Funérailles de M. Delaunay. — Discours de M. Faye. 348

Recherches sur les substitutions; par M. *Camille Jordan*. 351

Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions; par M. *Camille Jordan*. 368

Pages

Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand; par M. *A. Mannheim* 403

Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes; par M. *A. Mannheim* 406

Sur la publication d'un cours de Physique mathématique professé à Paris en 1867 et 1868; par M. *Émile Mathieu* 418

Sur un théorème de Poisson; par M. *H. Laurent* 422

Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *J. Graindorge* 426

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire de géométrie analytique;

PAR M. LAGUERRE.

SECTION PREMIÈRE.

ÉQUATION MIXTE D'UNE COURBE.

1. Je supposerai, dans tout ce qui va suivre, les différentes figures que j'aurai à considérer rapportées à un système de coordonnées rectilignes quelconque.

Soient une courbe arbitraire C tracée dans un plan, et M un point quelconque de ce plan; j'appelle x et y ses coordonnées.

Menons du point M une tangente à la courbe, et soit k le coefficient angulaire de cette tangente; la quantité k (qui généralement est susceptible de plusieurs valeurs) est une fonction des coordonnées variables x et y.

Cette fonction, il est facile de le voir, ne peut être prise arbitrairement et doit satisfaire à une équation aux différences partielles linéaire et du premier ordre, qu'on peut établir de la façon suivante.

Appelons, pour un instant, X et Y les coordonnées courantes de la tangente menée du point M à la courbe; son équation sera

$$Y - y = k(X - x). \tag{1}$$

Pour que les différentes droites représentées par cette équation, lorsqu'on y fait varier x et y, enveloppent une courbe, il faut et il suffit que la droite obtenue, en remplaçant le point M par un point infiniment voisin, coupe la première en un point fixe, quelle que soit la direction du déplacement; il est clair, d'ailleurs, que ce point fixe est le point de contact de la tangente avec la courbe.

Différentions successivement l'équation (1), par rapport à x et y, en supposant X et Y constantes; il vient

$$-0 = \frac{dk}{dx}(X - x) - k \quad \text{et} \quad -1 = \frac{dk}{dy}(X - x).$$

D'où, en éliminant $X - x$ entre ces deux relations,

$$\frac{dk}{dx} + k\frac{dk}{dy} = 0.$$

Telle est l'équation aux différences partielles à laquelle doit satisfaire la fonction k, pour qu'elle représente le coefficient angulaire d'une tangente menée du point (x, y) à une courbe quelconque tracée dans le plan.

Cette équation a pour intégrale générale

$$y - kx = f(k),$$

la caractéristique f désignant une fonction arbitraire de la variable; et, telle est en termes finis, la relation à laquelle doit satisfaire k.

Il est facile de trouver directement cette relation. En effet,

$$Y - y = k(X - x)$$

étant l'équation de la tangente menée du point M à la courbe, $y - kx$ est l'ordonnée du point où cette tangente coupe l'axe des y; la valeur de cette ordonnée ne dépend évidemment que de la valeur de k. On a donc

$$y - kx = f(k).$$

2. Lorsque la courbe donnée est algébrique, $f(k)$ est généralement une irrationnelle susceptible de m valeurs et racine d'une équation

algébrique de degré m. Cette équation est d'ailleurs irréductible si la courbe ne se décompose pas en courbes de degré inférieur.

k satisfait donc à une équation de la forme

$$(2)\quad A_0(y-kx)^m + A_1(y-kx)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(y-kx) + A_m = 0,$$

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ désignant des polynômes entiers en k d'un degré quelconque.

Le nombre m indique combien on peut mener de droites tangentes à la courbe et parallèles à une direction donnée. Quant à la classe de la courbe, elle est indiquée par le degré en k de l'équation précédente, degré qui est généralement égal à m, mais qui peut lui être supérieur lorsque la courbe est tangente à la droite de l'infini.

Ce cas particulier mis de côté, on voit que, dans l'équation (2), A_0 est un nombre que l'on peut supposer égal à l'unité, et $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des polynômes entiers en k et respectivement des degrés $1, 2, \ldots, m$.

Si, pour rendre l'équation homogène, nous posons

$$k = \frac{\mu}{\lambda},$$

on voit que la relation précédente peut être mise, pour une courbe de classe n, sous la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & (\lambda y - \mu x)^n + n(A\lambda + B\mu)(\lambda y - \mu x)^{n-1} \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2}(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2)(\lambda y - \mu x)^{n-2} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

ou encore, en réunissant dans un même terme les coefficients de la même puissance de λ,

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}c\lambda^{n-2}\mu^2 - \ldots + nh\lambda\mu^{n-1} + k\mu^n = 0.$$

3. La relation précédente, qui, pour chaque point du plan, donne les coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener de ce point à une courbe donnée, définit complétement cette courbe.

Je la désignerai, dans tout ce qui suit, sous le nom d'*équation mixte* de la courbe.

Une telle équation s'écrira de la façon suivante :

$$F(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

F désignant une fonction homogène et entière, mais du reste entièrement arbitraire, des trois variables que comporte son expression; ou encore, en mettant seulement en évidence les variables λ et μ,

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

f désignant une fonction homogène de ces variables.

Le plus souvent, pour mettre en évidence les coefficients du polynôme $f(\lambda, \mu)$, j'emploierai la notation commode de M. Cayley, en désignant par

$$(a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

le polynôme

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}c\lambda^{n-2}\mu^2 + \ldots;$$

en sorte que l'équation mixte générale des courbes de la classe n sera

$$(a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n = 0.$$

4. Il est facile de passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation mixte.

En effet,

$$y\xi - x\eta = \zeta$$

étant l'équation d'une droite quelconque tracée dans le plan, l'équation tangentielle d'une courbe est la relation, homogène par rapport aux trois variables,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire ξ, η et ζ pour que la droite soit tangente à la courbe. Si l'on déduit de l'équation de la tangente la valeur de son coefficient angulaire et la valeur de l'ordonnée au point où elle coupe l'axe des y, on obtient les deux relations suivantes :

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\mu}{\lambda}, \quad y - \frac{\mu}{\lambda}x = \frac{\zeta}{\xi},$$

d'où

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\lambda y - \mu x}{\zeta};$$

en substituant ces valeurs de ξ, η et ζ de l'équation précédente, il vient

$$\Phi(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

équation de la courbe donnée.

Dans le plus grand nombre de cas, il sera plus commode de calculer directement l'équation mixte d'une courbe, que de la tirer de son équation tangentielle. Mais je veux déduire, de ce qui précède, une conséquence très-simple qui nous sera utile par la suite.

5. Considérons plusieurs courbes dont les équations tangentielles soient

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \ldots,$$

et une autre courbe dont l'équation s'obtienne en égalant à zéro une fonction entière des polynômes qui forment les premiers membres des équations précédentes, et soit par exemple

$$f(A, B, C, \ldots) = 0.$$

Cela posé, il résulte immédiatement de la proposition précédente, que

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0$$

étant les équations mixtes des premières courbes, l'équation mixte de la dernière est

$$f(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots) = 0.$$

Ainsi, l'équation mixte générale des courbes de $n^{ième}$ classe inscrites dans un polygone de n^2 côtés est

$$P + \rho Q = 0,$$

ρ désignant un coefficient arbitraire et

$$P = 0, \quad Q = 0$$

représentant deux quelconques de ces courbes.

6. De l'équation mixte d'une courbe, il est facile de déduire son équation en coordonnées cartésiennes.

En effet, soit $f(\lambda, \mu) = 0$ cette équation; la courbe est évidemment le lieu des points d'où l'on peut lui mener deux tangentes coïncidantes. Donc, si l'on désigne par Δ le discriminant de la forme $f(\lambda, \mu)$,

$$\Delta = 0$$

est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes.

On retrouve ainsi la méthode donnée par M. Cayley pour passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation en coordonnées cartésiennes.

Ce qui précède suppose que la courbe n'a pas de singularités. En effet, si elle a une tangente double ou une tangente d'inflexion, on voit que chaque point de l'une quelconque de ces droites jouit de la propriété que deux des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe se confondent; chacun de ces points satisfait donc à l'équation précédente.

Pour s'en tenir aux singularités ordinaires, on voit que si l'on désigne par $U = 0$ l'équation (cartésienne) de la courbe, par $T = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes doubles et par $I = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes d'inflexion, on a

$$\Delta = UT^2I^3.$$

7. Soit

$$f(\lambda, \mu) = (a, b, c, \ldots (\lambda, \mu)^n$$

l'équation mixte d'une courbe de classe n.

Il est clair, d'après ce qui précède, que $a, b, c, \ldots$ sont des fonctions de x et de y qui ne peuvent être choisies arbitrairement; et, en effet, $f(\lambda, \mu)$ étant une fonction de $(\lambda y - \mu x)$, l'on doit avoir identiquement

$$\lambda \frac{df}{dx} - \mu \frac{df}{dy} = 0.$$

On doit, dans la plupart des questions qui se présentent, avoir égard aux relations entre les coefficients qui résultent de l'équation précé-

dente, et l'étude de ces relations conduit elle-même à des résultats dignes d'intérêt; mais, dans un grand nombre de cas, — et ce sont ces cas particuliers que j'étudie spécialement dans ce Mémoire, — on peut, pour ainsi dire, les laisser de côté, ou du moins ne les faire intervenir que d'une façon indirecte.

8. La proposition fondamentale, sur laquelle je m'appuierai constamment dans ce qui suit peut s'énoncer ainsi.

Proposition. — *Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes*

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \quad f_1(\lambda, \mu) = 0, \quad f_2(\lambda, \mu) = 0, \ldots.$$

Si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* $f_0, f_1, f_2, \ldots$, *l'équation*

$$I = 0$$

représente une courbe dont le degré est précisément égal au poids de l'invariant.

Démonstration. — Je rappellerai brièvement ce qu'on nomme *poids d'un invariant*. Si, dans les formes données, on remplace l'une des variables, λ par exemple, par λt, l'invariant relatif aux nouvelles formes que l'on obtient ainsi est égal à l'invariant primitif I, multiplié par une certaine puissance de λ; l'exposant de cette puissance est le poids de l'invariant.

Ceci posé, mettant en évidence toutes les variables dans les équations mixtes des courbes, écrivons-les sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &F_0(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0, \\ &F_1(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0, \\ &F_2(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si, dans les polynômes qui forment les premiers membres de ces équations, nous remplaçons respectivement x et y par tx et ty, nous obtenons les polynômes suivants :

$$F_0(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x), \quad F_1(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x), \quad F_2(\lambda, \mu, \lambda t y - \mu t x), \ldots.$$

Le nouvel invariant I′ déduit de ces formes, comme I l'était des premières, contient t à une puissance dont le degré est celui de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0.$$

Posons maintenant

$$\lambda y - \mu x = \lambda', \quad \lambda y + \mu x = \mu',$$

en effectuant une substitution linéaire, dont le déterminant

$$\omega = 2xy$$

est indépendant de t.

On déduit de là

$$\lambda = \frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \quad \mu = \frac{\mu' - \lambda'}{2x},$$

et les formes précédentes deviennent

$$F_0\left(\frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \frac{\mu' - \lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \quad F_1\left(\frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \frac{\mu' - \lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \ldots.$$

L'invariant I″, relatif à ce système de formes et analogue à I′, lui est égal, à un facteur près, qui, étant une puissance de déterminant ω de la substitution, est indépendant de t.

Dans I″, t entre évidemment à un degré égal au poids de l'invariant; la proposition est donc démontrée.

Remarque I. — La démonstration précédente suppose que les coefficients des polynômes $f_0(\lambda, \mu), f_1(\lambda, \mu), \ldots$ ont la forme la plus générale (compatible avec les relations nécessaires qui existent entre eux). Dans des cas particuliers, le degré de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0$$

peut *s'abaisser;* mais alors la droite de l'infini fait partie de la courbe.

Remarque II. — Ce que je viens de dire s'applique aux covariants que l'on peut déduire des formes

$$f_0(\lambda, \mu), \quad f_1(\lambda, \mu), \ldots.$$

Les équations que l'on obtient en égalant à zéro les différents coefficients d'un covariant représentent des courbes d'un degré égal au poids de ce covariant.

9. J'ai cru devoir, pour plus de clarté, employer dans ce Mémoire les coordonnées rectilignes.

Si l'on voulait employer les coordonnées triangulaires symétriques, il suffirait, dans les formules précédentes, de rétablir l'homogénéité en introduisant une troisième variable z.

Rien n'est à changer, si ce n'est la signification géométrique qu'on doit attribuer à l'équation mixte de la courbe. Mais il est, je crois, inutile d'insister sur ce sujet.

SECTION II.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE TROISIÈME CLASSE.

10. Considérons une courbe de troisième classe K^3, et soit

$$U = (a, b, c, d)(\lambda, \mu)^3 = 0$$

son équation mixte.

La forme U n'a qu'un invariant; c'est le discriminant

$$D = a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

L'équation

$$D = 0$$

est, comme nous l'avons vu, l'équation en coordonnées cartésiennes de la courbe K^3; elle est du degré 6, ce nombre étant le poids du discriminant.

Pour obtenir les points de rebroussement de K^3, il faut chercher les points du plan pour lesquels l'équation

$$U = 0 \tag{1}$$

a trois racines égales.

Considérons le covariant $(ac - b^2)\lambda^2 + (ad - bc)\lambda\mu + (bd - c^2)\mu^2$; les conditions nécessaires et suffisantes pour l'égalité des trois racines de l'équation (1) sont les suivantes :

$$ac - b^2 = 0, \quad ad - bc = 0, \quad bd - c^2 = 0,$$

équations de trois courbes du quatrième ordre (n° **8**, *Rem. II*).

Les 9 points de rebroussement de K^3 sont donc les points communs à ces trois courbes.

Il est clair qu'on peut trouver une infinité de courbes du quatrième ordre passant par ces 9 points. Pour avoir leur expression générale, considérons, en même temps que la courbe K^3, une courbe de seconde classe arbitraire K^2 et dont l'équation mixte soit

$$V = (A, B, C)(\lambda, \mu)^2 = 0.$$

Posons

$$I = A(bd - c^2) - B(ad - bc) + C(ac - b^2) \text{ [*]}.$$

I est un invariant des formes U et V, de poids égal à 4. L'équation

$$I = 0$$

représente donc une courbe du quatrième ordre δ^4; elle est évidemment satisfaite quand on pose

$$bd - c^2 = 0, \quad ad - bc = 0, \quad ac - b^2 = 0;$$

elle passe donc par les 9 points de rebroussement de K^3.

11. Cherchons directement les points où elle coupe cette courbe. Pour tout point de K^3, l'équation (1) a deux racines égales, et, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, on peut supposer que la valeur commune de ces racines soit zéro, ou bien poser

$$a = 0, \quad b = 0.$$

[*] Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 170.

I devient alors égale à

$$-Ac^2;$$

pour que cette quantité s'annule, il faut que l'on ait

$$c^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le point pris sur K^3 soit un point de rebroussement, ou bien que

$$A = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente menée en ce point à K^3 touche aussi K^2.

La courbe $\mathfrak{I}^4$ rencontre donc K^3 aux 9 points de rebroussement (chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *a priori*) et aux 6 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^2.

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de troisième classe* K^3 *et une courbe de seconde classe* K^2, *les* 6 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^3 *et les* 9 *points de rebroussement de* K^3 *sont sur une même courbe de quatrième ordre* $\mathfrak{I}^4$.

12. Si l'on prend au hasard, sur K^3, 5 points α, ces 5 points et les 9 points de rebroussement de la courbe déterminent une courbe du quatrième ordre qui rencontre K^3 en un sixième point β. D'un autre côté, les 5 tangentes menées à K^3 par les points α déterminent une courbe de seconde classe K^2; K^2 et K^3 ont une sixième tangente commune. Son point de contact avec K^3, étant sur une courbe du quatrième ordre passant par les 5 points α et les 9 points de rebroussement, se confond avec β.

D'où le théorème suivant, réciproque de la proposition précédente :

Théorème. — *Si par les* 9 *points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* K^3, *on mène une courbe quelconque du quatrième ordre, cette courbe rencontre* K^3 *en* 6 *points* [*] *distincts des points de*

[*] Ces points sont, en général, distincts des points de rebroussement; mais, dans des cas particuliers, un certain nombre d'entre eux peuvent venir se confondre avec quelques-uns de ces derniers.

rebroussement; les tangentes menées à K^3 *par ces* 6 *points touchent une même conique.*

13. La conique K^2 peut se composer d'un couple de points P et Q. La courbe 5^4 passe alors par les 6 points de rebroussement de K^3 et les 6 points de contact des tangentes qu'on peut lui mener des points P et Q. Je dis, de plus, qu'elle passe par ces points eux-mêmes.

En effet, pour l'un quelconque de ces points, la tangente menée de ce point à K^2 est indéterminée, l'équation

$$V = 0$$

est satisfaite identiquement, et l'on a

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Mais, dans ces hypothèses, I s'annule évidemment, la proposition est donc démontrée.

En se reportant au paragraphe précédent, on déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Étant pris sur une courbe de troisième classe* K^3 3 *points* a, a' *et* a'', *tels que les tangentes en ces points concourent en un même point* A, *toute courbe du quatrième ordre qui passe par les* 9 *points de rebroussement de* K^3 *et les* 3 *points* a, a' *et* a'' *passe par le point* A ; *elle rencontre* K^3 *en* 3 *autres points, et les tangentes en ces points se coupent en un même point* B, *qui est également situé sur la courbe du quatrième ordre.*

14. Menons, dans le plan de K^3, une droite quelconque A, les tangentes menées à la courbe aux 6 points α, où elle est coupée par A, touchent une même conique K^2 qui est la polaire de A.

Dans ce cas, la courbe du quatrième ordre 5^4 passant par les 6 points de contact α qui sont en ligne droite, il est clair que cette courbe se décompose en la droite A et une courbe du troisième ordre $\mathcal{R}^3$ passant par les 9 points de rebroussement. Cette courbe, d'ailleurs, est complétement déterminée, puisque par les points de

rebroussement d'une courbe de troisième classe on ne peut faire passer qu'une courbe de troisième ordre, et elle demeure toujours la même, de quelque façon que l'on choisisse la droite A.

Son équation est facile à obtenir; considérons, par exemple, la conique polaire de la droite de l'infini, et soit

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \mid \lambda, \mu)^2 = 0$$

son équation mixte; d'après ce que je viens de dire, on voit que l'équation

$$\mathfrak{F}(bd - c^2) - \mathfrak{G}(ad - bc) + \mathfrak{H}(ac - b^2) = 0$$

s'abaisse au troisième degré; c'est précisément l'équation de la courbe $\mathfrak{R}^3$.

15. Si la droite A est tangente à la hessienne de K^3, sa conique polaire se compose de 2 points; ces 2 points, d'après ce que j'ai dit ci-dessus (n° **15**), se trouvent sur $\mathfrak{S}^4$, qui, dans ce cas, se compose de la tangente à la hessienne et de la courbe $\mathfrak{R}^3$. Comme ils sont en dehors de la droite, ils se trouvent nécessairement sur $\mathfrak{R}^3$; on retrouve ainsi cette proposition bien connue de M. Cayley :

Le lieu des couples de points qui constituent les coniques polaires des tangentes à la hessienne d'une courbe de troisième classe est la courbe du troisième ordre qui passe par ses 9 points de rebroussement.

16. On peut encore supposer que la conique K^2 se réduise à un point double.

Soient ξ et η les coordonnées de ce point; son équation mixte sera

$$-(y - \eta)\mu + \lambda(x - \xi) = 0,$$

ou en posant, pour abréger, $y - \eta = Y$ et $x - \xi = X$,

$$(-Y, X \mid \lambda, \mu)^1 = 0.$$

D'où, pour l'équation de la conique K^2 (considérée comme point double),

$$(Y^2, -XY, X^2 \mid \lambda, \mu)^2 = 0.$$

On a alors

$$I = (ac - b^2)X^2 + (ad - bc)XY + (bd - c^2)Y^2,$$

expression dans laquelle, si l'on considère X et Y comme les variables, on reconnaît immédiatement le covariant quadratique de U.

L'équation

$$I = 0$$

représente une courbe du quatrième ordre $\mathfrak{S}^4$ qui passe par les 9 points de rebroussement de K^3 et qui touche cette courbe aux points de contact des tangentes issues du point donné; on voit, de plus, à l'inspection de l'équation précédente, qu'elle a ce point pour point double, et que les coefficients angulaires des tangentes au point double sont les racines de l'équation

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ad - bc)\lambda\mu + (ad - c^2)\mu^2 = 0,$$

obtenue en égalant à zéro le covariant quadratique de U.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si, par un point donné* M, *on mène les tangentes à une courbe de troisième classe* K^3, *on peut tracer une courbe du quatrième degré* $\mathfrak{S}^4$ *qui passe par les* 9 *points de rebroussement de* K^3, *touche cette courbe aux* 3 *points de contact des tangentes et a le point* M *pour point double.*

17. On sait que l'on peut, de différentes façons, partager les 9 points de rebroussement de K^3 en 3 groupes de 3 points, a_1, a_2 et a_3, b_1, b_2 et b_3, c_1, c_2 et c_3, de telle sorte que, dans chacun de ces groupes, les tangentes à la courbe concourent en un même point. Soient A, B, C les points de rencontre correspondant aux groupes précédents.

Supposons que la conique K^2 se compose du point A pris 2 fois; 2 des points de rencontre de $\mathfrak{S}^4$ avec K^3 viennent se confondre alors au point a_1, et, comme 2 de ces points s'y trouvaient déjà confondus, on trouve en tout 4 points d'intersection réunis au

point a_1. D'où l'on conclut que $\mathfrak{I}^4$ a ce point pour point double; comme le même raisonnement peut être fait relativement aux points a_2 et a_3, et, comme d'ailleurs (*voir* n° **16**) $\mathfrak{I}^4$ présente un point double en A, l'on voit que cette courbe du quatrième ordre a 4 points doubles; elle se résout donc en un couple de coniques.

On déduit de là les propositions suivantes [*] :

Soient a_1, a_2 et a_3 3 points de rebroussement d'une courbe de troisième classe K^3, tels que les tangentes en ces points concourent en un même point A; *si, par les points a_1, a_2, a_3, A et par un cinquième point de rebroussement b_1 on mène une conique, cette conique $\mathfrak{B}$ rencontre K^3 en 2 autres points de rebroussement de la courbe b_2 et b_3, et les tangentes aux points b_1, b_2 et b_3 concourent en un même point* B *qui se trouve également sur la conique $\mathfrak{B}$.*

Les 3 autres points de rebroussement c_1, c_2, c_3 de la courbe sont également sur une conique $\mathfrak{C}$, qui passe par les points a_1, a_2, a_3, A *et par le point* C, *où se coupent les tangentes de rebroussement aux points c, c_1 et c_2.*

En désignant par m, n, p, q 4 points situés sur une conique, appelons pour un instant *rapport anharmonique* de ces points le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus d'un point quelconque de la conique, et désignons-le par la notation

$$R(m, n; p, q).$$

Cela posé, en désignant par ρ et ρ^2 les deux racines imaginaires de l'unité, on a, en considérant les points a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, A, B, situés sur la conique $\mathfrak{B}$, les relations suivantes :

$$R(A, a_3; a_1, a_2) = -\rho,$$
$$R(A, B; a_1, a_2) = \rho^2,$$

et les relations analogues que l'on obtient en permutant entre eux les points a_1, a_2 et a_3.

---

[*] Comme le développement de ces questions se rattache plutôt à la géométrie pure qu'à la géométrie analytique, j'ai, pour abréger, supprimé quelques démonstrations que le lecteur rétablira facilement.

Pour les points situés sur la conique $\mathfrak{C}$, on a de même les relations

$$R(A, a_3;\ a_1, a_2) = -\rho^2,$$
$$R(A, C;\ a_1, a_2) = \rho.$$

J'ajouterai encore la remarque suivante :

Si, par les points A, B, C et deux points de rebroussement d'un même groupe, tels que a_1 et a_2, on fait passer une conique, le pôle de la droite $a_1 a_2$ relativement à cette conique est le troisième point de rebroussement du groupe, c'est-à-dire a_3.

Le développement des relations qui ont lieu entre les points de rebroussement d'une courbe de troisième classe donnerait lieu à quelques remarques intéressantes; mais ce n'est pas ici le lieu de les exposer. M. Hesse a déjà donné d'élégantes propositions sur ce sujet dans le *Journal de Crelle* (t. XXXVI).

18. Parmi le grand nombre de propositions particulières que l'on peut déduire de la proposition du n° **11**, je me contenterai de donner la suivante :

Considérons un point de rebroussement r de la courbe K^3 et une courbe du quatrième ordre composée de la tangente de rebroussement en ce point et d'une courbe du troisième ordre passant par les 8 autres points de rebroussement r'. La tangente en r rencontre la courbe en 3 points α distincts du point r, et les tangentes en ces points concourent en un même point ρ situé sur la courbe du troisième ordre $\mathfrak{A}^3$ qui passe par les 9 points de rebroussement.

En appliquant la proposition déjà citée, on aura le théorème suivant :

Si, par les 8 points r', on mène une courbe quelconque du troisième ordre, cette courbe coupe K^3 en 2 points distincts des points r'; les tangentes menées en ces points à K^3 se coupent sur la tangente de rebroussement au point r. La courbe du troisième ordre passe en outre par ce point de rencontre et par le point ρ, qui est ainsi le neuvième point fixe, commun à toutes les courbes du troisième ordre qui passent par les 8 points r'.

19. Considérons maintenant deux courbes de troisième classe K^3 et K'^3, et soient

$$U = (a, b, c, d)(\lambda, \mu)^3 = 0$$

et

$$U' = (a', b', c', d')(\lambda, \mu)^3 = 0$$

leurs équations mixtes.

Ces deux courbes ont 9 tangentes communes, et l'équation mixte générale des courbes de troisième classe, qui touchent ces 9 droites est

$$U + \rho U' = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

20. Pour éviter d'inutiles répétitions, je transcrirai d'abord le tableau suivant des divers invariants des formes U et U' :

$$\begin{aligned}
D &= a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd,\\
D' &= a'^2d'^2 + 4a'c'^3 + 4d'b'^3 - 3b'^2c'^2 - 6a'b'c'd',\\
H &= d'(a^2d + 2b^3 - 3abc) - 3c'(b^2c + abd - 2ac^2)\\
&\quad + 3b'(2b^2d - bc^2 - acd) - a'(3bcd - ad^2 - 2c^3),\\
H' &= d(a'^2d' + 2b'^3 - 3a'b'c') - 3c(b'^2c' + a'b'd' - 2a'c'^2)\\
&\quad + 3b(2b'^2d' - b'c'^2 - a'c'd') - a(3b'c'd' - a'd'^2 - 2c'^3),\\
I &= 2(ac - b^2)(b'd' - c'^2) + 2(bd - c^2)(a'c' - b'^2)\\
&\quad - (ad - bc)(a'd' - b'c'),\\
J &= ad' - 3bc' + 3cb' - da',\\
R &= (ad')^3 - 9(ad')^2(bc') + 27(ca')^2(cd') + 27(db')^2(ab')\\
&\quad - 81(ab')(bc')(cd') - 27(ad')(ab')(cd')\ [*].
\end{aligned}$$

21. Les plus importants de ces invariants sont d'abord les deux

---

[*] Je désigne ici, suivant l'usage, par les symboles (ad'), (ab'), ..., les binômes alternés

$$ad' - da', \quad ab' - ba', \ldots.$$

discriminants D et D'; en les égalant à zéro, on a les équations cartésiennes des deux courbes K^3 et K'^3; l'équation d'une courbe quelconque du troisième ordre K^3_ρ, tangente aux 9 tangentes communes aux 2 premières, s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant de

$$U + \rho U';$$

elle peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0.$$

22. Le tableau précédent renferme 2 *combinants* R et J.

R est le résultant des 2 formes U et U'; l'équation

$$R = 0$$

représente évidemment l'ensemble des 9 tangentes communes aux 2 courbes, droites qui touchent aussi toutes les autres courbes du faisceau.

Pour un point de rebroussement de K^3, l'équation

$$U = 0$$

ayant trois racines égales, on peut supposer

$$a = b = c = 0;$$

dans ces hypothèses, R devient

$$-d^3 a'^3,$$

et J devient

$$-da';$$

pour tout point de rebroussement de K^3, on a donc

$$(3) \qquad R - J^3 = 0;$$

si maintenant on remarque que, R et J, étant des combinants, ne changent pas de valeur quand on y remplace U par $U + \rho U'$, on en

conclut que l'équation précédente représente le lieu des points de rebroussement de toutes les courbes du faisceau.

Ceci suppose que l'on n'ait pas *identiquement*

$$R - J^3 = 0.$$

Je reviendrai plus loin sur ce sujet.

23. Considérons une courbe de troisième classe K^3 et ses 9 tangentes de rebroussement; on peut inscrire, dans le polygone formé par ces 9 droites, une infinité de courbes de troisième classe qui, toutes, auront les 9 premières tangentes pour tangentes de rebroussement. Le lieu des points de rebroussement se confond alors avec les tangentes elles-mêmes, et l'on a

$$J = 0.$$

D'où cette conséquence remarquable :

Si deux courbes de troisième classe ont les mêmes tangentes de rebroussement, l'invariant J *relatif à ces deux courbes est identiquement nul.*

Réciproquement, si cet invariant est identiquement nul, les deux courbes ont mêmes tangentes de rebroussement.

24. Cette proposition peut s'énoncer de la façon suivante pour les courbes du troisième ordre.

Si, par les 9 points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, on fait passer un faisceau de courbes, ce faisceau détermine sur une sécante fixe quelconque une division en involution.

Chaque groupe de 3 points de cette involution peut être considéré comme déterminé par les racines d'une équation de la forme

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d + \rho(a'x^2 + 3b'x^2 + 3c'x + d') = 0;$$

cela posé, l'invariant

$$ad' - 3bc' + 3cb' - da'$$

est toujours nul, *quelle que soit la position de la sécante.*

25. Si l'on égale à zéro l'invariant H, l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe du sixième ordre, $\mathcal{S}^6$.

Pour trouver les points de rencontre de cette courbe avec K^3, faisons

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

H se réduit alors à

$$2a'c^3.$$

Cette quantité s'annule pour

$$c^3 = 0;$$

donc la courbe $\mathcal{S}^6$ passe par les points de rebroussement de K^3 et elle la touche en ces points, puisque chaque point d'intersection doit compter pour 3.

Cette quantité s'annule encore pour

$$a' = 0;$$

donc $\mathcal{S}^6$ passe par les 9 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K'^3.

Les courbes $\mathcal{S}^6$ et K^3 n'ont d'ailleurs, évidemment, aucun autre point commun.

Laissons la courbe K'^3 fixe, et remplaçons la courbe K^3 par la courbe variable K^3_ρ, dont l'équation cartésienne est

$$(2) \qquad D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0;$$

la courbe que je viens de considérer est remplacée par une courbe $\mathcal{S}^6_\rho$, dont l'équation est

$$(3) \qquad H + \rho(J^2 - 6I) + 3\rho^2 H' + 2\rho^3 D' = 0;$$

les courbes K^3_ρ et $\mathcal{S}^6_\rho$ se rencontrent :

1° Aux points de contact des tangentes communes à K'^3 et à K^3_ρ;

2° Aux points de rebroussement de K^3_ρ, chacun de ces derniers comptant 3 fois.

Si l'on élimine la variable ρ entre les équations précédentes, l'équation obtenue en égalant le résultant à zéro représente donc :

1° Les 9 tangentes communes aux courbes K_ρ^3;

2° Le lieu de leurs points de rebroussement de ces courbes, ce dernier lieu étant pris 3 fois.

Remarquons maintenant que, le premier membre de l'équation (3) étant la dérivée par rapport à ρ du premier membre de l'équation (2), le résultant de ces deux équations est le discriminant de (2).

Ce discriminant ne peut donc différer que par un facteur constant du produit

$$R(R - G^3)^3,$$

puisque, comme nous l'avons vu,

$$R - G^3 = 0$$

est l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes K_ρ^3.

Ces résultats sont d'ailleurs d'accord avec la théorie bien connue des formes cubiques simultanées.

26. Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté à des courbes d'une classe quelconque.

Soient un faisceau de courbes de $n^{ième}$ classe tangentes à n^2 droites fixes, et

$$U = (a, b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^n = 0,$$
$$U' = (a', b', c', \ldots, h', k', l' \between \lambda, \mu)^n = 0$$

les équations mixtes de deux courbes de ce faisceau, K'' et K'''.

Soit, en outre, D le discriminant de la forme U.

Posons

$$H = a' \frac{dD}{da} + b' \frac{dD}{db} + \ldots + k' \frac{dD}{dk} + l' \frac{dD}{dl}.$$

H est un invariant des formes U et U', dont le poids est égal à $n(n-1)$, et par conséquent l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe $S^{n(n-1)}$ de degré $n(n-1)$.

Pour trouver ses points de rencontre avec K^n, il faut faire, dans l'invariant H,

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

D'après un beau théorème de Joachimsthal [*], D est de la forme

$$b^2\Delta + a\varphi + a^2\psi + \ldots,$$

Δ désignant le discriminant de la forme

$$(b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^{n-1}.$$

En tenant compte de cette expression, on voit que, dans les hypothèses données, la valeur de H se réduit à

$$a'\varphi_0,$$

φ_0 désignant la valeur de φ quand on y fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Or l'on a en général

$$\varphi = -4c\Delta + b\left(d\frac{d}{dc} + \ldots\right)\Delta;$$

on a donc

$$\varphi_0 = -4c\Delta_0,$$

Δ_0 désignant la valeur de Δ dans les mêmes hypothèses que ci-dessus.

D'après le théorème déjà mentionné de Joachimsthal, on a

$$\Delta = c^2\nabla + b\Phi + b^2\Psi + \ldots,$$

∇ désignant le discriminant de la forme

$$(c, d, \ldots, k, l \between \lambda, \mu)^{n-2}.$$

---

[*] Salmon, *Alg. sup.*, p. 80.

On en déduit

$$\Delta_0 = c^2 \nabla ;$$

d'où l'on voit que la valeur de H se réduit à

$$-4a'c^3\nabla.$$

27. Cette valeur s'annule :

1° Quand l'on a

$$a' = 0.$$

Donc la courbe $\mathcal{J}^{n(n-1)}$ passe par les n^2 points, où les tangentes communes aux courbes du réseau touchent K^n.

2° Quand on a

$$\nabla = 0.$$

C'est ce qui a lieu pour les points doubles de K^n; car, en ces points, l'équation

$$U = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que l'on peut supposer infinie; mais on a alors

$$l = 0 \quad \text{et} \quad h = 0,$$

et par conséquent

$$\nabla = 0,$$

puisque, dans ce cas, l'équation

$$(c, d, \ldots, k, l \mid \lambda, \mu)^{n-2} = 0$$

a aussi une racine double.

3° Quand on a

$$c^3 = 0.$$

Donc la courbe considérée passe par les points de rebroussement de K^n, et, comme ces points comptent 3 fois, la courbe lui est tangente en chacun d'eux.

Nous avons ainsi tous les points d'intersection des courbes K^n et

$\mathcal{G}^{n(n-1)}$. Chacun des points doubles de K^n doit, en effet, être compté au moins deux fois. Or le nombre total des points d'intersection est $[n(n-1)]^2$, ou m^2, si l'on pose

$$n(n-1) = m.$$

D'après une formule de Plücker, on a

$$m(m-1) = n + 2d + 3r,$$

en désignant respectivement par d et par r le nombre des points doubles et des points de rebroussement de K^n.

On en déduit

$$m^2 = m + n + 2d + 3r = n^2 + 2d + 3r.$$

Les m^2 points d'intersection se composent donc :

1° Des n^2 points de contact des tangentes communes à K^n et K'^m;

2° Des d points doubles (chacun d'eux étant compté deux fois);

3° Des r points de rebroussement (chacun d'eux étant compté 3 fois).

28. Quelques remarques sur les résultats précédents ne seront pas inutiles.

On sait que les points d'intersection des deux courbes de degré $n(n-1)$, K^n et $\mathcal{G}^{n(n-1)}$ ne sont pas indépendants entre eux; en conservant les mêmes notations que ci-dessus [*],

$$\frac{(m-1)(m-2)}{1.2} - d - r$$

de ces points sont déterminés par les autres.

De même les tangentes communes aux deux courbes de classe n, K^n et K'^n, ne sont pas non plus indépendantes entre elles;

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$$

d'entre elles sont déterminées par les autres.

---

[*] Clebsch et Gordan, *Th. von der Abelschen Functionen*, p. 35.

Les deux nombres précédents sont égaux, car ils indiquent tous deux le *genre* de la courbe K^n. On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de n classe K^n, *si l'on mène une courbe quelconque de degré* $n(n-1)$, *qui passe par les points doubles de* K^n *et la touche en chacun de ses points de rebroussement, cette courbe rencontre* K^n *en* n^2 *points distincts de ses points singuliers; les tangentes menées à* K^n, *en ces* n^2 *points, sont tangentes à une autre courbe de même classe.*

29. Considérons maintenant le faisceau de courbes considéré plus haut (n° **26**). Soit K_ρ^n l'une quelconque des courbes de ce faisceau, et

$$U + \rho U' = 0$$

son équation mixte. En désignant par $F(\rho)$ le discriminant de cette équation (discriminant pris par rapport à λ et μ),

$$F(\rho) = 0$$

est l'équation cartésienne de K_ρ^n.

La courbe $\mathcal{J}^{n(n-1)}$ relative à K_ρ^n a pour équation

$$\frac{dF}{d\rho} = 0.$$

Soit W le discriminant de $F(\rho)$ (discriminant pris par rapport à ρ);

$$W = 0$$

est le résultat de l'élimination de ρ entre les deux équations précédentes. Nous obtenons ainsi l'enveloppe des courbes du faisceau; d'autre part, en se reportant à ce que j'ai dit dans le n° **27** sur l'intersection des courbes $\mathcal{J}^{n(n-1)}$ et K^n, on voit que cette enveloppe se compose :

1° Des n^2 tangentes communes;

2° Du lieu des points doubles des courbes du faisceau, ce lieu étant compté deux fois;

3° Du lieu des points de rebroussement de ces courbes, ce lieu étant compté trois fois.

Si donc on désigne respectivement par

$$\mathfrak{T} = 0, \quad \mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{R} = 0$$

les équations du système des tangentes communes, du lieu des points doubles et du lieu des points de rebroussement, on a

$$W = \mathfrak{T}\mathfrak{D}^2\mathfrak{R}^3 \text{ [*]}.$$

Du poids connu des invariants $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{R}$, on conclut que le lieu des points doubles des courbes du faisceau est du degré $2n(n-2)(n-3)$ et le lieu des points de rebroussement du degré $3n(n-2)$.

30. Je reviens maintenant au cas spécial d'un faisceau de courbes de troisième classe. L'équation générale d'une courbe de ce faisceau est

$$(2) \qquad D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0;$$

et l'on voit que par chaque point du plan passent quatre courbes du faisceau.

Il est facile de trouver les coefficients angulaires des tangentes à ces courbes au point donné. En effet, en désignant pour un instant par

$$f(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

les équations mixtes des courbes K^3 et K'^3, l'équation

$$f(\lambda, \mu) + \rho\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

où x et y ont été remplacées par les valeurs des coordonnées du point, détermine les tangentes menées de ce point à une courbe quelconque du faisceau. L'ensemble de ces tangentes forme un faisceau d'involution, et les droites doubles de cette involution sont précisément les droites cherchées; on les obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro

[*] On déduit de là une proposition importante sur les formes binaires donnée par M. Salmon, d'après M. Cayley, je crois, mais sans démonstration (*High Algebra*, p. 149 de l'édition anglaise).

le Jacobien des deux formes f et φ, et l'équation qui donne des coefficients angulaires des tangentes est

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\mu} \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} & \frac{d\varphi}{d\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on met en évidence les coefficients de U et de U', cette équation devient

$$\Upsilon = (6ab' - ba',\ 3ac' - ca',\ ad' - da' + 3bc' - 3cb',\ 3(bd' - db'),\ 6(cd' - dc'))(\lambda, \mu)^4 = 0;$$

et si l'on désigne par S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme Υ, on a

$$S = 3J^2, \quad T = J^3 - 2R,$$

J et R ayant la même signification que dans les numéros précédents.

31. Par un point quelconque M du plan passent, comme nous l'avons vu, quatre courbes du faisceau. Voyons comment on peut déterminer le rapport anharmonique des tangentes à ces courbes en ce point. Soit k ce rapport anharmonique, si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

z sera racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-5)^2] - 4 \cdot 27 T^2 (z-1)^3 = 0;$$

S et T désignant, comme précédemment, l'invariant quadratique et l'invariant cubique de Υ.

Si l'on remplace S et T par les expressions données ci-dessus, on obtient l'équation

$$(3) \qquad J^6[(z+2)(2z-5)^2] - 4(J^3 - 2R)^2(z-1)^3 = 0.$$

32. Si nous supposons que la valeur du rapport anharmonique k soit donnée, l'équation précédente est l'équation du lieu des points

tels que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en ce point, aient un rapport anharmonique donné.

On voit que ce lieu se compose de deux courbes du neuvième degré

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2}+2\sqrt[2]{(z-1)^3}(J^3-2R)=0$$

et

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2}-2\sqrt[2]{(z-1)^3}(J^3-2R)=0.$$

Réciproquement, toute courbe dont l'équation est de la forme

$$\alpha R+\beta J^3=0,$$

α et β désignant des constantes, représente une courbe telle que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en chacun de ses points, ont un rapport anharmonique constant.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Si le rapport est harmonique; on a alors

$$z+2=0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du neuvième degré, dont l'équation est

$$J^3-2R=0;$$

2° Si le rapport anharmonique est égal à une racine imaginaire de l'unité négative; on a alors

$$z-1=0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du troisième degré, dont l'équation est

$$J=0.$$

53. Les résultats précédents supposent que J n'est pas identiquement nul. Nous avons vu que ce cas se présentait lorsque les courbes du faisceau avaient mêmes tangentes de rebroussement.

L'équation (3) donne alors

$$z=1.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on considère les courbes de troisième classe qui ont les mêmes tangentes de rebroussement, par tout point du plan passent quatre de ces courbes, le rapport anharmonique de ces quatre courbes est constant, quelle que soit la position du point, et égal à une racine imaginaire de l'unité négative.

34. J'ai montré (**22**) que l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes de troisième classe, qui forment un faisceau, était

$$R - J^3 = 0.$$

Ceci suppose toutefois que cette équation n'a pas lieu identiquement. Ce cas peut effectivement se présenter.

Soit

$$U = (a, b, c, d \mid \lambda, \mu)^3 = 0$$

l'équation mixte d'une courbe de troisième classe K^3; soient ξ, η les coordonnées d'un point M du plan, dont l'équation mixte sera

$$(-Y, X \mid \lambda, \mu)^4 = 0,$$

si l'on pose pour abréger

$$Y = y - \eta \quad \text{et} \quad X = x - \xi.$$

Considérons le faisceau de courbes de troisième classe, dont l'équation est

$$(a, b, c, d \mid \lambda, \mu)^3 + \rho(-Y^3, XY^2, -X^2Y, X^3 \mid \lambda, \mu)^3 = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Pour abréger, je poserai

$$(a, b, c, d \mid \lambda, \mu)^3 = f(\lambda, \mu),$$

et

$$h(\lambda, \mu) = (ac - b^2)\lambda^2 + \ldots,$$
$$g(\lambda, \mu) = (a^2 d + 2b^3 - 3abc)\lambda^3 + \ldots.$$

$h(\lambda, \mu)$ et $g(\lambda, \mu)$ sont, comme on le voit, le covariant quadratique et le covariant cubique de $f(\lambda, \mu)$; je n'ai écrit que le premier terme de leur développement.

Cela posé, on voit immédiatement que l'équation

$$f(X, Y) = 0$$

représente l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe; que R et J sont respectivement égaux à $f^3(X, Y)$ et $f(X, Y)$; la relation

$$R - J^3 = 0$$

est donc satisfaite identiquement.

Résultat facile à prévoir, car l'équation (2) devient dans ce cas

$$(4) \qquad D + 2\rho g(X, Y) + \rho^2[f(X, Y)]^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation (considérée comme étant du quatrième degré) est évidemment nul, puisqu'elle a deux racines égales à l'infini; d'autre part, on sait que ce discriminant est égal, à un facteur numérique près, à

$$R(R - J^3)^3;$$

on devait donc trouver $R - J^3 = 0$.

Si l'on égale à zéro le discriminant de l'équation (4) (considérée comme une équation du second degré), on obtiendra l'équation de l'enveloppe des courbes du faisceau. Cette enveloppe ne comprendra pas les tangentes communes servant de base au faisceau, parce que les courbes les touchent en des points fixes; elle se réduira donc au lieu des points de rebroussement qui devra être compté trois fois.

Donc le discriminant de l'équation (4) est un cube parfait; et, en effet, il a pour valeur

$$g^2(X, Y) - Df^2(X, Y),$$

quantité qui, d'après un théorème bien connu de M. Cayley, est égale à

$$-4h^3(X, Y).$$

Le lieu des points de rebroussement est donc la courbe du sixième degré, dont l'équation est

$$h(X, Y) = 0.$$

SECTION III.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE QUATRIÈME CLASSE.

35. Soit une courbe de quatrième classe K^4 et

$$U = (a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

son équation mixte. La forme U a deux invariants fondamentaux S et T, dont je transcris ci-dessous les valeurs,

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Ces invariants étant respectivement d'un poids égal à 4 et d'un poids égal à 6, les équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad T = 0$$

représentent respectivement des courbes du quatrième et du sixième ordre. Ces courbes, que j'appellerai $\mathfrak{s}^4$ et $\mathfrak{t}^6$, jouissent des propriétés remarquables déjà signalées par M. Clebsch [*].

Pour trouver les points de rencontre de $\mathfrak{s}^4$ et de K^4, faisons, dans S, a et b égaux à zéro, S devient alors égal à

$$3c^2;$$

cette quantité s'annule pour $c = 0$, et ne s'annule que dans ce cas. Donc la courbe $\mathfrak{s}^4$ passe par les 24 points de rebroussement de la courbe K^4 et ne coupe la courbe qu'en ces points.

Dans les mêmes hypothèses, T se réduit à

$$-c^3;$$

d'où cette conséquence :

La courbe $\mathfrak{t}^6$ touche K^4 en chacun de ses 24 points de rebroussement et n'a d'ailleurs aucun point commun avec elle.

---

[*] *Über symbolische Darstellung algebraischer Formen* (CRELLE, t. 59).

Ainsi les points de rebroussement de K^4 sont les points d'intersection des deux courbes $\mathcal{S}^4$ et $\mathcal{C}^6$.

36. Par chaque point M du plan, on peut mener quatre tangentes à K^4. Cherchons le rapport anharmonique de ces tangentes. Soit k ce rapport anharmonique. Si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

nous voyons, comme au n° **31**, que z est racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-3)^2] - 4.27T^2(z-1)^3 = 0,$$

S et T ayant la même signification qu'au paragraphe précédent.

L'équation

$$\alpha S^3 + \beta T^2 = 0.$$

où α et β désignent des constantes arbitraires, représente donc le lieu d'un point tel, que les tangentes menées de ce point à K^4 forment un faisceau ayant un rapport anharmonique donné.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Quand $k = 0$, d'où $z = \infty$; on obtient alors

$$S^3 - 27T^2 = 0;$$

c'est, en coordonnées cartésiennes, l'équation de la courbe K^4;

2° Quand $k = -1$, d'où $z = 2$; le rapport est alors anharmonique, et l'équation se réduit à

$$T = 0;$$

la courbe $\mathcal{C}^6$ est donc le lieu des points tels, que les tangentes menées à la courbe forment un faisceau harmonique;

3° Quand $k = \rho$, ρ étant une racine cubique de l'unité négative; on a alors $z - 1 = 0$, et l'équation se réduit à

$$S = 0;$$

la courbe $\mathcal{S}^4$ est donc le lieu des points tels, que le rapport anhar-

monique des tangentes menées à la courbe est égal à une racine cubique de l'unité négative.

37. Pour étudier les points doubles de la courbe K^4, considérons en même temps une autre courbe de quatrième classe K'^4, dont l'équation mixte soit

$$U' = (a', b', c', d', e' \between \lambda, \mu)^4;$$

et posons

$$\begin{aligned} I &= ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea', \\ J &= e'(ac - b^2) - 2d'(ad - bc) + c'(ae + 2bd - 3c^2) \\ &\quad - 2b'(be - cd) + a'(ce - d^2). \end{aligned}$$

I et J sont deux invariants des formes U et U'.

Si nous égalons à zéro le nouvel invariant $\Omega = 2SJ - 3TI$, comme cet invariant est d'un poids égal à 10, l'équation

$$(1) \qquad 2SJ - 3TI = 0$$

représentera une courbe du dixième degré $\mathcal{C}^{10}$.

Pour avoir les points de rencontre de cette courbe avec K^4, faisons

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

Ω devient alors

$$6c^2(-3c^2c' + 2b'cd + a'ce - a'd^2) + 3c^3(6cc' - 4db' + ea'),$$

ou en réduisant

$$3c^2a'(3ce - 2d^2).$$

Cette quantité s'annule

1° Quand

$$a' = 0;$$

donc $\mathcal{C}^{10}$ passe par les 16 points de contact des tangentes communes aux courbes K^4 et K'^4;

2° Quand l'on a

$$c^2 = 0;$$

donc $\mathcal{A}^{10}$ passe par les 28 points de rebroussement de K^4, chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *à priori;*

3° Quand l'on a

$$3ce - 2d^2 = 0,$$

ce qui a lieu aux points doubles de K^4; en effet, pour ces points, l'équation

$$U = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que l'on peut supposer infinie, ce qui revient à poser

$$e = 0, \quad d = 0,$$

auquel cas l'expression précédente s'annule.

Chacun de ces 28 points doubles doit d'ailleurs évidemment être compté deux fois.

On a aussi tous les points d'intersection de K^4 et de $\mathcal{A}^{10}$, car ces points sont au nombre de 120, et l'on a bien

$$120 = 16 + 2.24 + 2.28.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une autre courbe arbitraire de même classe* K'^4, *les* 16 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^4 *et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du dixième degré* $\mathcal{A}^{10}$.

38. Les 120 points d'intersection des courbes $\mathcal{A}^{10}$ et K^4 ne sont pas indépendants entre eux; comme on le sait,

$$\frac{11.10}{2} - 52 \text{ [*]}$$

sont déterminés par les autres.

[*] Cf. Clebsch et Gordan, *loc. cit.*

Des 16 points d'intersection distincts des points singuliers de K^4, 13 suffisent donc pour déterminer les autres; remarquons maintenant que les 13 tangentes en ces points suffisent pour déterminer aussi 16 tangentes communes à K^4 et à un faisceau de courbes de quatrième classe.

De là résulte le théorème suivant :

Si par les 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en* 16 *points distincts des points singuliers; les tangentes menées en ces* 16 *points à* K^4 *touchent une autre courbe de quatrième classe.*

39. La courbe de quatrième classe K'^4 peut se décomposer en une courbe de classe inférieure et en un point ou en un système de points. On démontrerait, comme au n° **13**, que la courbe $\mathfrak{A}^{10}$ passe par ces points.

En particulier, si K'^4 se résout en un système de 4 points, on a la proposition suivante :

Si, par quatre points (α), *on mène des tangentes à une courbe de quatrième classe* K^4, *les* 16 *points de contact des tangentes et les* 52 *points singuliers de la courbe sont situés sur une même courbe du dixième ordre* $\mathfrak{A}^{10}$, *qui passe par les quatre points* (α).

40. Lorsqu'on coupe une courbe de quatrième classe K^4 par une droite A, les tangentes, aux 12 points de rencontre de A avec K^4, touchent une même courbe de troisième classe K^3, qui est la polaire de A.

Adjoignons à cette dernière courbe un point arbitraire M; l'ensemble de K^3 et M constitue une courbe de quatrième classe.

La courbe $\mathfrak{A}^{10}$ correspondante passe par les points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^4, c'est-à-dire par les 12 points de rencontre de A avec K^4; elle contient donc cette droite tout entière, et se résout en la droite A et une courbe du neuvième ordre $\mathfrak{B}^9$. Cette courbe passe d'ailleurs par les 52 points singuliers de K^4, les 4 points de contact des tangentes menées de M à K^4 et en outre par le point M (Cf., n° **39**).

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si d'un point* M *pris dans le plan d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène des tangentes à la courbe, les* 4 *points de contact et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du neuvième ordre, qui passe en outre par le point* M.

Théorème II. — *Si, par les* 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène une courbe quelconque du neuvième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en* 4 *points distincts des points singuliers, les tangentes en ces points à la courbe* K^4 *se coupent en un même point* M, *qui se trouve sur la courbe du neuvième ordre.*

41. On peut choisir la droite A de telle façon que sa polaire se décompose en une conique et un point ϖ; nous prenons, du reste, le point M arbitrairement dans le plan. La courbe $\mathfrak{A}^{10}$ se compose alors de la droite A et de la courbe $\mathfrak{B}^9$ correspondante au point M; d'après ce que nous avons vu, le point ϖ doit se trouver sur $\mathfrak{A}^{10}$, et, comme il est en dehors de la droite A, il est nécessairement situé sur $\mathfrak{B}^9$.

On trouve dans le plan 21 points ϖ, qui sont évidemment caractérisés par la propriété que les tangentes que l'on peut mener de chacun d'eux à K^4 ont leurs 4 points de contact en ligne droite; ces 21 points se trouvent donc sur la courbe $\mathfrak{B}^9$, quelle que soit la position du point M.

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Toutes les courbes du neuvième ordre qui passent par les* 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe passent en outre par* 21 *points fixes; ces points fixes sont les points qui jouissent de la propriété que les tangentes menées de chacun d'eux à* K^4 *ont leurs points de contact en ligne droite.*

42. Je m'arrête ici dans l'étude de l'invariant [*]

$$2SJ - 3TI;$$

[*] Je signalerai cependant encore, en passant, le cas important où l'invariant quadratique I est identiquement nul; alors la courbe $\mathfrak{A}^{10}$ se décompose en S^4 et en une courbe du sixième ordre $\mathfrak{J}^6$ sur laquelle sont, dans ce cas, situés les 28 points doubles de la courbe K^4 et les 28 points doubles de K^{14}.

les théorèmes auxquels cette étude nous a conduits comprennent, dans leur énoncé, tous les points singuliers de la courbe.

Pour étudier en particulier les points doubles de K^4, je considérai le covariant du sixième ordre de U,

$$\begin{aligned} V = (&a^2d + 2b^3 - 3abc,\ a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c,\\ &5abe - 15acd + 10b^2d,\ 10b^2e - 10d^2a,\\ &-5ade + 15bce - 10bd^2,\ -ae^2 - 2bde + 9ce^2 - bcd^2,\\ &3cde - 2d^3 - be^2 \between \lambda, \mu)^6. \end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$U = 0$$

ait deux couples de racines égales, il faut et il suffit que tous les coefficients du covariant V se réduisent à zéro.

Le poids de ce covariant étant égal à 9, en égalant à zéro ses coefficients, on obtient l'équation d'autant de courbes du neuvième ordre, qui toutes passent par les 28 points doubles de la courbe.

45. Considérons en particulier le coefficient de $\lambda^3\mu^3$, l'équation

$$ad^2 - eb^2 = 0$$

représente, comme nous venons de le voir, une courbe du neuvième degré passant par les 28 points doubles de K^4.

La forme remarquable de cette équation donne lieu à d'importantes conséquences; on voit, en effet, facilement que

$$a = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point x_∞ situé à l'infini sur l'axe des x.

De même

$$b = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point y_∞ situé à l'infini sur l'axe des y.

Supposons que ces points soient deux points doubles de la courbe; alors a et b seront deux carrés parfaits, et si l'on pose

$$a = \alpha^2 \quad \text{et} \quad b = \beta^2,$$

l'équation de la courbe du neuvième ordre deviendra

$$\alpha^2 d^2 - \beta b^2 = 0,$$

equation qui se décomposera en deux autres

$$\alpha d - \beta b = 0$$

et

$$\alpha d + \beta b = 0.$$

Dans ce fait analytique se trouve l'origine des beaux théorèmes donnés par Steiner sur les points doubles des courbes de quatrième classe [*]; mais, pour en développer toutes les conséquences, il est nécessaire d'étudier plus complétement le covariant V.

44. Considérons, en même temps que la courbe K^4, une conique quelconque K^2 dont l'équation mixte soit

$$(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0.$$

De cette forme et du covariant V, on déduit l'invariant suivant :

$$\begin{aligned} I = {} & (a^2 d - 3abc + 2b^3)C^3 - (a^2 e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2 c)BC^2 \\ & + (abe - 3acd + 2b^2 d)AC^2 + (4abe - 12acd + 8b^2 d)B^2 C \\ & + 6(ad^2 - b^2 e)ABC + 4(ad^2 - b^2 e)B^3 - (ade - 3bce + 2bd^2)A^2 C \\ & - (4ade - 12bce + 8bd^2)AB^2 + (ae^2 + 2bde - 9c^2 e + 6cd^2)BA^2 \\ & - (be^2 - 3cde + 2d^3)A^3 . . \end{aligned}$$

[*] Il est presque inutile d'ajouter que Steiner les a énoncés pour les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre.

Cet invariant étant d'un poids égal à 9, l'équation

$$I = 0$$

représente une courbe du neuvième ordre $\mathfrak{I}^9$.

1° Lorsque l'on fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

I se réduit à

$$(2d^2 - 3ce)(3Bc - Ad)A^2;$$

cette quantité s'annule pour

$$e = 0 \quad \text{et} \quad d = 0;$$

donc la courbe $\mathfrak{I}^9$ passe par les 28 points doubles de K^4. Elle s'annule aussi pour

$$A^2 = 0;$$

donc $\mathfrak{I}^9$ touche K^4 aux 8 points de contact des tangentes communes à K^4 et à K^2.

2° Considérons les 8 tangentes communes à K^4 et à K^2; ces droites se coupent en 28 points. Pour chacun de ces points, les équations

$$(a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

et

$$(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

ont deux racines communes, qu'on peut supposer égales respectivement à zéro et à l'infini, ce qui revient à poser

$$a = 0, \quad e = 0, \quad A = 0, \quad C = 0;$$

I s'annule dans cette hypothèse, donc la courbe $\mathfrak{I}^9$ passe par les points de rencontre des 8 tangentes communes.

De là résulte la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une courbe de seconde classe* K^2, *on peut construire une courbe du*

neuvième ordre $\mathfrak{I}^9$, *qui passe par les* 28 *points doubles de* K^4, *par les* 28 *points de rencontre des* 8 *tangentes communes à* K^4 *et à* K^2, *et qui touche* K^4 *aux points de contact de ces tangentes.*

45. Pour calculer l'équation de la courbe $\mathfrak{I}^9$, nous pourrons toujours supposer que, par une substitution linéaire des variables, on ait mis le polynôme qui, égalé à zéro, donne l'équation de la conique K^2 sous la forme

$$\mathcal{F}\lambda\mu;$$

par la même substitution, le polynôme qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe de quatrième classe K^4, deviendra

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}\,|\,\lambda, \mu)^4.$$

La valeur de l'invariant I, relative aux deux formes précédentes, est, à un facteur numérique près,

$$\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

si l'on désigne par ω le déterminant de la substitution employée, on aura, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, à un facteur numérique près,

$$I = \omega^{-9}.\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

l'équation de la courbe $\mathfrak{I}^9$ sera donc

$$\omega^{-9}\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2) = 0.$$

46. Supposons la conique K^2 composée du système des deux points M et M', dont les coordonnées sont respectivement

$$\xi, \eta \quad \text{et} \quad \xi', \eta'.$$

Posons, pour un instant,

$$x - \xi = X, \quad y - \eta = Y, \quad x - \xi' = X', \quad y - \eta' = Y'.$$

L'équation de la conique K^2 (ou de l'ensemble des deux points) est

$$(-Y\lambda + X\mu)(-Y'\lambda + X'\mu) = 0.$$

Faisons la substitution suivante :

$$\lambda = X'\lambda' - X\mu',$$
$$\mu = Y'\lambda' - Y\mu'$$

de déterminant

$$\omega = XY' - YX'.$$

Par cette substitution, l'équation des points M, M′ devient

$$\omega^2\lambda\mu = 0;$$

si l'équation mixte de K^4 est

$$F(\lambda, \mu) = 0,$$

cette équation devient, après la transformation,

$$F(X'\lambda' - X\mu', Y'\lambda' - Y\mu') = 0,$$

ou, en développant,

$$[F(X', Y'),\ \Phi', \ldots,\ \Phi,\ F(X, Y)](\lambda, \mu)]^4,$$

Φ et Φ' désignant deux polynômes entiers en X, Y, X′, Y′, dont on peut se dispenser d'écrire la valeur.

Les quantités $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ étant ainsi déterminées, on en déduit

$$I = \frac{1}{\omega^3}[F(X', Y')\Phi^2 - F(X, Y)\Phi'^2],$$

expression qui, malgré la présence de ω en dénominateur, est un polynôme entier en X, Y, X′ et Y′.

Si les points donnés M et M′ sont deux points doubles de la courbe, comme les équations

$$F(X, Y) = 0,$$
$$F(X', Y') = 0$$

représentent respectivement les faisceaux de tangentes menées de ces points à la courbe, les polynômes $F(X, Y)$ et $F(X', Y')$ sont des carrés parfaits; et, si l'on pose

$$F(X, Y) = W^2,$$
$$F(X', Y') = W'^2,$$

l'équation de la courbe δ^9 devient

$$\frac{W'^2\Phi^2 - W^2\Phi'^2}{\omega^3} = 0,$$

ou bien

$$\frac{(\Phi W' - W\Phi')(\Phi W' + W\Phi')}{\omega^3} = 0.$$

δ^9 se décompose ainsi, comme nous le verrons tout à l'heure, en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

Remarque. — Il est clair que, si la courbe K^4 a une tangente double pour chacun des points où cette tangente coupe la courbe, le polynôme

$$F(X, Y)$$

est un carré parfait; on peut donc appliquer la proposition précédente, soit à un couple de ces points, soit à un de ces points et un point double.

47. On sait, depuis les beaux travaux de Steiner et de M. Hesse, qu'une courbe de quatrième classe peut être considérée (et cela de soixante-trois façons différentes) comme l'enveloppe de coniques qui lui sont quadruplement tangentes.

Si

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0$$

sont les équations tangentielles de deux coniques d'un de ces groupes, l'équation de la courbe K^4 peut se mettre sous la forme

$$AB = C^2,$$

en désignant par

$$C = 0$$

l'équation d'une troisième conique.

En se reportant à ce que j'ai dit au n° 5, on voit immédiatement que c'est aussi la forme de l'équation mixte de la courbe, si l'on suppose que

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

soient les équations mixtes de trois coniques.

Soient respectivement

$$(1) \qquad a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2 = 0,$$

$$(3) \qquad A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2 = 0$$

ces équations mixtes.

L'équation mixte de la courbe de quatrième classe K^4 sera

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2)(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2) \\ &\quad = (A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2)^2; \end{aligned} \right.$$

ou bien encore, si l'on pose

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + 2\rho(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ &\quad + \rho^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + 2\theta(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ &\quad + \theta^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + (\rho + \theta)(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ &\quad + \rho\theta(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \end{aligned}$$

θ et ρ désignant deux paramètres variables arbitraires,

$$(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2) = (A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2)^2.$$

Les équations

$$(5) \qquad a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0$$

et

$$(6) \qquad \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 = 0$$

représentent deux quelconques des coniques du groupe quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes aux 8 points de contact des deux coniques touchent une troisième conique, dont l'équation est

$$(7) \qquad A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0.$$

On peut donner à ρ six valeurs telles que la conique représentée par l'équation (1) se décompose en un système de 2 points; ces points sont évidemment des points doubles de la courbe, et l'on obtient ainsi les 12 points doubles qui appartiennent au groupe considéré.

48. Ce qui précède peut être présenté d'une façon plus nette en employant les considérations exposées par M. Aronhold dans son Mémoire *sur les Courbes du quatrième ordre* [*].

On sait qu'en général trois courbes de seconde classe quelconques peuvent être considérées comme les polaires de trois droites du plan par rapport à une certaine courbe de troisième classe.

Les courbes déterminées par les équations (1), (2) et (3) sont ainsi les polaires de trois droites relativement à une courbe de troisième classe bien déterminée K^3 [**].

Soient

$$p = 0, \quad \varpi = 0, \quad P = 0$$

les équations de ces droites.

La conique déterminée par l'équation (5) est la polaire de la droite

$$p + 2\rho P + \rho^2 \varpi = 0;$$

[*] *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin*, juin 1864.

[**] *Voir* Hermite : *Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires* (*Journal de Crelle*, t. LVII).

toutes les droites déterminées par cette équation, lorsqu'on y fait varier ρ, enveloppent une conique C^2 dont l'équation est

$$p\varpi - P^2 = 0.$$

De là les conséquences suivantes :

1° Toute droite tangente à la conique C^2 a pour polaire, par rapport à K^3, une conique quadruplement tangente à K^4 et appartenant au groupe considéré.

2° Si l'on considère deux droites tangentes à C^2, leurs coniques polaires sont quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes menées aux points de contact touchent une même conique, qui est la polaire de la corde joignant les points où les droites touchent C^2.

3° Les six couples de points doubles appartenant au groupe sont les coniques polaires des tangentes communes à C^2 et à la hessienne de K^3.

49. Je vais maintenant démontrer que, si la conique K^2 est une des coniques données par l'équation (7), en d'autres termes, si cette conique est la polaire d'une droite du plan par rapport à K^3, la courbe $\mathcal{J}^9$ se décompose en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

A cet effet, posons

$$B^2 - AC = \Delta,$$

et effectuons la substitution

$$\begin{aligned} \lambda &= (\sqrt{\Delta} - B)\lambda' + (\sqrt{\Delta} + B)\mu', \\ \mu &= A\lambda' - A\mu', \end{aligned}$$

propre à réduire à un rectangle la forme $A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$, et de déterminant

$$\omega = -2A\sqrt{\Delta}.$$

Soient

$$\begin{aligned} &2B'\lambda\mu, \\ &a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2, \\ &\alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2 \end{aligned}$$

ce que deviennent respectivement, après la transformation, les formes

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2, \quad a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2, \quad \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2.$$

Les équations mixtes des courbes K^2 et K^4 deviendront

$$2B'\lambda\mu = 0,$$
$$(a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2)(\alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2) - B'^2\lambda^2\mu^2 = 0,$$

et l'équation, en coordonnées cartésiennes de $\mathfrak{s}^9$ sera, d'après ce que j'ai dit plus haut,

$$\omega^{-9} B'^3 [a'\alpha'(b'\gamma' + c'\beta')^2 - c'\gamma'(b'\alpha' + a'\beta')^2] = 0,$$

ou encore

$$\omega^{-9} B'^3 (a'\gamma' - c'\alpha')(b'^2\alpha'\gamma' - \beta'^2 a'c') = 0.$$

50. En effectuant les calculs, on trouve

$$B' = 2A\Delta,$$
$$b' = A(2Bb - Ca - Ac),$$
$$\beta' = A(2B\beta - C\alpha - A\gamma).$$

Mettons maintenant l'équation précédente sous la forme suivante :

$$(8) \quad \omega^{-9} B'^2 B' (a'\gamma' - c'\alpha')[b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2)] = 0.$$

Je remarque que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

est un invariant des trois formes (5), (6) et (7); on a donc

$$B'(a'\gamma' - c\alpha') = -\begin{vmatrix} 0 & B' & 0 \\ a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = -\omega^3 \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

On a de même

$$\alpha'\gamma' - \beta'^2 = \omega^2(\alpha\gamma - \beta^2) \quad \text{et} \quad a'c' - b'^2 = \omega^2(ac - b^2);$$

d'où

$$\begin{aligned} &b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2) \\ &\quad = A^2\omega^2[(2Bb - Ca - Ac)(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)(ac - b^2)]. \end{aligned}$$

Remplaçons, dans l'équation (8), ω, B',... par leurs valeurs; elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \times [(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2)] = 0.$$

51. Avant d'examiner la relation précédente, il est bon de revenir sur quelques points de la théorie des sections coniques.

Considérons trois coniques

$$p, \quad \varpi, \quad P,$$

et soient, comme ci-dessus,

$$(a, b, c \between \lambda, \mu)^2 = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 = 0, \quad (A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

leurs équations mixtes.

Les invariants fondamentaux de ce système de formes sont :

1° Les discriminants

$$ac - b^2, \quad \alpha\gamma - \beta^2, \quad AC - B^2,$$

qui, égalés à zéro, donnent les équations cartésiennes des coniques;

2° Les invariants simultanés quadratiques

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta, \quad Ac + Ca - 2Bb, \quad a\gamma + c\alpha - 2b\beta.$$

L'équation

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta = 0$$

représente une conique; de chacun des points de cette courbe les tangentes menées aux deux coniques P et ϖ forment un faisceau harmonique.

L'équation des tangentes communes à P et à ϖ s'obtient en égalant à zéro le résultant des formes

$$(\alpha, \beta, \gamma \mid \lambda, \mu)^2 \quad \text{et} \quad (A, B, C \mid \lambda, \mu)^2.$$

D'après un beau théorème de M. Boole, cette équation peut se mettre sous la forme

$$(A\gamma + C\alpha - 2B\beta)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(AC - B^2) = 0.$$

Les invariants $Ac + Ca - 2Bb$ et $a\gamma + c\alpha - 2b\beta$ ont une signification analogue relativement aux systèmes de coniques P, p et p, ϖ.

3° L'invariant gauche G, dont la valeur est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

L'équation

$$G = 0$$

représente une courbe de troisième ordre; c'est évidemment le lieu des points tels, que les tangentes menées de ces points aux trois coniques données forment un faisceau en involution.

Il est clair qu'on peut remplacer une de ces coniques par une quelconque des courbes dont l'équation est

$$\rho(A, B, C \mid \lambda, \mu)^2 + \sigma(a, b, c \mid \lambda, \mu)^2 + \varphi(\alpha, \beta, \gamma \mid \lambda, \mu)^2 = 0,$$

ρ, σ et φ désignant des constantes arbitraires.

Cette courbe jouit d'un grand nombre de propriétés remarquables qui sont dues, pour la plupart, à M. Cayley.

52. D'après le résultat auquel je suis parvenu dans les n°s 49 et 50, on voit que, dans le cas considéré, la courbe δ^9 se décompose en une courbe de troisième ordre Q^3, dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et une courbe de sixième ordre Q^6, dont l'équation est

$$(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2) = 0.$$

53. Étudions d'abord la courbe Q^3; pour abréger le discours, j'emploierai les expressions suivantes.

J'appellerai coniques F^2 les différentes coniques qui sont les polaires des droites du plan relativement à la courbe de troisième classe K^3; les coniques F^2 forment un réseau.

J'appellerai coniques G^2 les coniques qui sont les polaires, par rapport à K^3, des droites tangentes à C^2; ces coniques G^2 sont des positions particulières des coniques F^2, chacune d'elles est quadruplement tangente à K^3.

D'après ce que j'ai dit plus haut, on voit que la courbe Q^3 peut être définie par les propriétés suivantes :

Si l'on prend d'une façon quelconque trois coniques F^2, *le lieu des points, d'où l'on voit ces coniques suivant un faisceau en involution, est la courbe* Q^3.

Étant données deux coniques quelconques F^2, *les points de rencontre des tangentes communes à ces deux courbes sont situés sur* Q^3.

Étant donnée une conique quelconque G^2, *les quatre tangentes, aux points où cette courbe touche* K^3 *se coupent en* 6 *points situés sur* Q^3.

La courbe Q^3 *est le lieu des couples de points qui font partie des coniques* F^2.

Elle passe par les 12 *points doubles de* K^3 *qui appartiennent au groupe considéré.*

La courbe Q^3 est la corrélative de la courbe désignée par G dans le Mémoire de Steiner.

54. La courbe Q^3, qui passe par les 12 points doubles du groupe, est complétement déterminée et ne dépend pas de la conique K^2.

Il n'en est pas de même de la courbe Q^6.

La courbe ϑ^9, qui se compose des courbes Q^3 et Q^6, devant passer par les 28 points doubles de la courbe et Q^3 ne contenant que 12 de ces points, les 16 autres sont situés sur Q^6.

L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&[(2Bb - Ca - Ac)^2 - 4(AC - B^2)(ac - b^2)](\alpha\gamma - \beta^2)\\ &= [(2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2 - 4(AC - B^2)(\alpha\gamma - \beta^2)](ac - b^2).\end{aligned}$$

D'où, si l'on se reporte à ce que j'ai dit plus haut (n° **51**), les conclusions suivantes, qui concordent d'ailleurs avec ce qui a été établi généralement pour la courbe ϑ^9 :

Théorème. — *Étant données deux coniques quelconques p et ϖ, quadruplement tangentes à K^2 et appartenant au groupe considéré, les quatre tangentes aux points de contact de p rencontrent les quatre tangentes aux points de contact de ϖ en 16 points; ces 16 points et les 16 points doubles, qui n'appartiennent pas au groupe, sont situés sur une même courbe du sixième ordre, qui passe en outre par les 4 points d'intersection des coniques p et ϖ et touche K^2 aux 8 points où cette courbe est touchée par les coniques.*

55. Reprenons l'équation de Q^6

$$(2Bb - Ac - Ca)^2(\alpha\gamma - \beta^2) = (2B\beta - A\gamma - C\alpha)^2(ac - b^2),$$

et supposons que chacune des coniques p et ϖ se réduise à un couple de points (qui seront des points doubles du groupe).

On aura alors

$$\alpha\gamma - \beta^2 = V^2,$$

V étant l'équation de la droite qui joint les deux points en lesquels se résout la conique ϖ; on aura de même

$$ac - b^2 = W^2,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(2Bb - Ac - Ca^2)V^2 = (2B\beta - A\gamma - C\alpha)^2 W^2;$$

la courbe Q^6 se décompose, dans ce cas, en deux courbes du troisième ordre analogues à Q^3 et dont les équations sont

$$(2Bb - Ca - Ac)V + (2B\beta - C\alpha - A\gamma)W = 0,$$
$$(2Bb - Ca - Ac)V - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)W = 0.$$

56. Soient d et d' une couple quelconque de points doubles d'une courbe de quatrième classe K^4; ces points définissent un groupe de 12 points doubles (G), dont ils font eux-mêmes partie, et les 12 points du groupe sont situés sur une des courbes du troisième ordre de Steiner.

Soit Δ un troisième point double de la courbe; je supposerai, pour simplifier la démonstration, que d et d' soient respectivement les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y, et que Δ soit l'origine des coordonnées.

Cela posé, l'origine étant un point double, en faisant dans l'équation mixte de K^4

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

le résultat doit être un carré parfait; cette équation est donc de la forme

$$\begin{aligned}(\mu x - \lambda y)^4 &+ 4(\alpha\lambda + \beta\mu)(\mu x - \lambda y)^3 + 6(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2 \\ &+ 4(A\lambda^3 + 3B\lambda^2\mu + 3C\lambda\mu^2 + D\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2 \\ &+ (P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2)^2 = 0,\end{aligned}$$

$Px^2 + 2Qxy + Ry^2 = 0$ étant l'équation des tangentes menées à la courbe par le point Δ.

Les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y étant des points doubles de la courbe, les coefficients de λ^4 et de μ^4 dans l'équation précédente sont des carrés parfaits, et l'on peut poser, par exemple,

$$(9) \quad \begin{cases} P^2 - 4Ay + 6ay^2 - 4\alpha y^3 + y^4 = (y^2 - 2\alpha y + h)^2, \\ R^2 + 4Dx + 6cx^2 + 4\beta x^3 + x^4 = (x^2 + 2\beta x + k)^2, \end{cases}$$

d'où, en particulier, on déduit la relation suivante :

$$P^2k^2 - R^2h^2 = 0. \tag{10}$$

Les coefficients de $4\lambda^3\mu$ et de $4\lambda\mu^3$, dans l'équation mixte de K^4, sont respectivement

$$PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3x$$

et

$$RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2y - x^3y.$$

Il résulte de là, et de ce que j'ai dit plus haut, que l'équation de la courbe Q^6 est

$$\begin{aligned}&(y^2 - 2\alpha y + h)\\&\quad\times(RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2y - x^3y)\\&+(x^2 + 2\beta x + k)\\&\quad\times(PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3x) = 0,\end{aligned}$$

et l'équation de Q^3

$$\begin{aligned}&(y^2 - 2\alpha y + h)\\&\quad\times(RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2y - x^3y)\\&-(x^2 + 2\beta x + k)\\&\quad\times(PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3x) = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière équation est en apparence du sixième degré; mais, en vertu des relations (9), ce degré s'abaisse au troisième.

37. Les premiers membres des équations précédentes, quand l'on y fait

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

se réduisent respectivement à

$$Q(hR + kP) \quad \text{et à} \quad Q(hR - kP).$$

De l'équation (10), il résulte que l'une des quantités précédentes est

nulle [*]; le point Δ se trouve donc sur la courbe Q^3 ou sur la courbe Q^6.

Il est clair, d'après ce que j'ai dit précédemment, qu'il se trouve sur Q^3 s'il fait partie du groupe (G), et sur Q^6 dans le cas contraire.

Dans le premier cas, l'on a

$$hR - kP = 0;$$

or c'est là la condition nécessaire pour que les six droites représentées par les équations

$$y^2 - 2\alpha y + h = 0,$$
$$x^2 + 2\beta x + k = 0,$$
$$Px^2 + 2Qxy + Ry^2$$

soient tangentes à une même conique; et, d'ailleurs, ces droites sont les tangentes que l'on peut mener à la courbe par les trois points doubles A, B, C.

D'où cette propriété due à Steiner :

Si le point Δ appartient au groupe (G), les 6 tangentes que l'on peut mener à la courbe des points d, d' et Δ touchent une même conique.

58. Supposons maintenant que le point Δ n'appartienne pas au groupe (G); on a alors

$$hR + kP = 0;$$

soit Γ l'une quelconque des tangentes menées du point C à la courbe, et

$$Px - y(Q + \sqrt{Q^2 - PR}) = 0$$

son équation; l'équation de la seconde de ces tangentes Γ' sera

$$Px - y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0.$$

---

[*] Je suppose, pour abréger la discussion, qu'aucune des quantités P, Q, R ne soit nulle; c'est évidemment le cas général.

Appelons Γ_0 la conjuguée harmonique de Γ' par rapport aux deux axes $d\Delta$ et $d'\Delta$, l'équation de cette droite sera

$$Px + y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0,$$

l'ensemble des droites Γ et Γ_0 ayant pour équation

$$Px^2 - 2\sqrt{Q^2 - PR}\,xy - Ry^2 = 0.$$

L'égalité

$$hR + kP = 0$$

exprime précisément la relation nécessaire pour que les droites Γ et Γ_0 et les 4 tangentes que l'on peut mener à la courbe par les points d et d' touchent une même conique.

On peut donc, en groupant ensemble les résultats précédents, énoncer la proposition suivante :

Étant pris, sur une courbe de quatrième classe, 2 points doubles d et d', ces 2 points déterminent 10 autres points doubles de la courbe qui forment, avec les premiers, un groupe (G) de 12 points situés sur une même courbe du troisième ordre.

Soient Δ un point double de la courbe différent de d et de d', et Γ et Γ' les tangentes menées à ce point. La droite Γ et les tangentes menées par d et d' déterminent une conique. Cela posé :

1° Si Δ fait partie du groupe G, la droite Γ' se confond avec la deuxieme tangente que l'on peut mener du point Δ à la conique;

2° Si Δ ne fait pas partie de ce groupe, la droite Γ' et cette deuxième tangente sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites Δd et $\Delta d'$.

Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond [*];

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Tous les ingénieurs connaissent les belles expériences de J. Scott Russell [**] et de M. Bazin [***] sur la production et la propagation des ondes solitaires. Si, à l'entrée d'un canal rectangulaire contenant un liquide en repos et de profondeur constante, on donne naissance à un gonflement, soit en versant brusquement du dehors une nouvelle quantité de liquide, soit en refoulant celui qui s'y trouve déjà au moyen d'un piston placé à l'entrée, ce liquide se répand tumultueusement sur celui qui est un peu plus éloigné de l'entrée, et produit un grand nombre de tourbillons, qui, par les frottements considérables qu'ils occasionnent entre les couches fluides, rendent bientôt presque égales, du fond à la surface, les vitesses horizontales communiquées aux molécules liquides d'une même section. Ces tourbillonnements s'éteignent ensuite, le mouvement se régularise, et l'on voit se propager le long du canal une onde unique, dont le volume est tout en saillie au-dessus de la surface libre primitive, et dont la coupe longitudinale, parfaitement régulière et symétrique par rapport à la verticale

[*] Présentée à l'Académie des Sciences le 13 novembre 1871.

[**] Faites en 1843 et publiées en 1845 (*Report of the fourtheenth meeting of the Britisch Association for the advancement of science, heet at York in september* 1844; *London*, 1845).

[***] *Recherches hydrauliques entreprises par Darcy et continuées par M. Bazin*, 2e partie, au tome XIX des *Savants étrangers*; on peut voir aussi le *Rapport* de M. Clapeyron, *Comptes rendus*, 10 août 1863, t. LVII, p. 312.

menée par son sommet, a seulement deux points d'inflexion : c'est l'*onde solitaire*. Elle est douée, suivant l'expression de Scott Russell, d'une très-grande *longévité*, c'est-à-dire qu'elle parcourt de grands espaces sans se déformer d'une manière sensible. Scott Russell a trouvé expérimentalement et M. Bazin a vérifié avec soin que le carré de sa *célérité* ou vitesse de propagation est égal au produit de la gravité $g = 9^{m},809$ par la distance qu'il y a du sommet de l'onde au fond du canal. Chaque molécule liquide, en repos avant que l'onde l'atteigne et après qu'elle l'a dépassée, est animée dans l'intervalle d'une certaine vitesse dans le sens du transport apparent de la surface libre.

Ces lois se vérifient d'autant mieux que la hauteur du gonflement est plus petite en comparaison de la profondeur primitive du fluide : lorsque le rapport de la première de ces quantités à la seconde approche de l'unité, l'onde se raccourcit, sa forme cesse d'être stable, et son sommet, se propageant plus vite que sa partie antérieure, surplombe enfin et tombe en avant, par fragments qui donnent naissance à tout autant de nouvelles ondes solitaires plus petites : on dit alors que l'onde *déferle* ou qu'il y a *mascaret*.

Au lieu de produire à l'entrée du canal une onde *positive*, c'est-à-dire constituée par un gonflement, on peut y produire une onde négative, constituée par une dépression; cela se fait d'ordinaire en ouvrant et en fermant presque aussitôt après une vanne, de manière à laisser écouler une quantité limitée du liquide contenu dans le canal. Après quelques secondes, pendant lesquelles naissent et puis s'éteignent des tourbillonnements tumultueux qui rendent presque égales, de la surface au fond, les vitesses horizontales, le mouvement se régularise et la dépression se propage avec une célérité dont le carré vaut encore, bien qu'avec moins de précision que dans le cas de l'onde positive, le produit de la gravité par la distance du sommet (alors concave) de l'onde au fond; mais l'onde n'acquiert pas une forme stable et ne reste pas même unique; sa partie antérieure s'allonge sans cesse, tandis qu'il se forme à sa queue une série d'ondes plus petites et de grandeurs décroissantes, alternativement convexes et concaves, et qui sont, les premières, positives, les secondes négatives, c'est-à-dire entièrement situées, les unes au-dessus et les autres au-dessous de la surface libre initiale.

M. Bazin a encore étudié expérimentalement ce qu'il appelle des *remous*, c'est-à-dire des gonflements produits par l'injection continue et uniforme, à l'entrée d'un canal, d'une quantité indéfinie de liquide. Ces gonflements, en se propageant sur l'eau immobile du canal, offrent l'apparence d'une lame fluide de hauteur sensiblement constante qui glisserait par-dessus, précédée d'une série de convexités et de concavités de grandeurs décroissantes, respectivement situées au-dessus et au-dessous de la face supérieure de la lame liquide qui suit, mais toutes *positives*, c'est-à-dire plus élevées que la surface libre primitive : la première de ces convexités, appelée par M. Bazin *onde initiale*, est environ une fois et demie plus haute que la lame qui suit. Le carré de la vitesse de propagation de celle-ci et de l'onde initiale est égal au produit de la gravité par la profondeur primitive, augmentée d'une fois et demie la hauteur de la lame considérée.

Ces lois ne se vérifient qu'autant que le rapport de la hauteur de l'intumescence à la profondeur primitive est une quantité assez petite. Lorsque ce rapport approche de l'unité, l'onde initiale déferle sans cesse, sa hauteur n'est plus supérieure à celle de la lame qui suit, et, à cause sans doute de l'exagération des frottements du fond ou des parois, le carré de la vitesse de propagation n'est plus égal environ qu'au produit de la gravité par la distance de la face supérieure de cette lame au fond.

Concevons actuellement que le canal, toujours rectangulaire et de section normale constante à fond horizontal, ait une certaine pente longitudinale, et que le régime uniforme s'y trouve établi avant la propagation des ondes étudiées. Les frottements développés entre les filets fluides ou entre ceux-ci et les parois feront équilibre à la composante du poids de ces filets suivant l'axe du canal, composante dont on pourra par conséquent faire abstraction, de manière à réduire la pesanteur g à sa seconde composante, normale au fond et sensiblement égale à g. Si d'ailleurs les vitesses des divers filets sont assez peu différentes et qu'on adopte un système d'axes coordonnés animés de la moyenne de ces vitesses, le liquide, rapporté à ce système d'axes, pourra être supposé immobile. Des ondes ou des remous qui produiront de petites vitesses, peu différentes dans toute l'étendue d'une section normale, ne changeront d'une manière notable, ni le glisse-

ment relatif des filets, ni celui de la masse liquide le long des parois, ni par suite les frottements, qui feront toujours équilibre à la composante de la pesanteur suivant la direction des filets. Tout se passera donc sensiblement par rapport au système des axes mobiles adoptés, lors de la propagation de ces ondes ou de ces remous, comme si le canal était horizontal et le liquide primitivement en repos. M. Bazin a reconnu, par de nombreuses expériences, qu'il en est à peu près ainsi dans les canaux découverts ordinaires, et que l'on peut étendre avec assez d'exactitude, aux ondes ou aux remous qui y sont propagés, les lois des ondes et des remous produits dans un liquide en repos, pourvu que le mouvement soit rapporté à un système d'axes animés de la vitesse moyenne des filets fluides. Cette extension lui a permis d'expliquer les principales circonstances de la propagation des marées dans la partie maritime des fleuves, et notamment celle de la *barre*, ou onde initiale d'une grande hauteur qui les précède parfois, et qui, en déferlant aux points du fleuve où la profondeur primitive de l'eau est au-dessous d'une certaine limite, produit le *mascaret* proprement dit. Elle permettrait également de rendre compte des gonflements formés par les crues d'un fleuve dans la partie inférieure de ses affluents, et du retrait de ces crues qui a lieu dès que le fleuve commence à décroître.

Tels sont, en résumé, les phénomènes intéressants décrits par M. Bazin dans la deuxième partie des *Recherches hydrauliques* : les uns, dans lesquels le rapport de la hauteur des intumescences à la profondeur primitive est une petite quantité en valeur absolue, sont régis par des lois simples; les autres, dans lesquels ce rapport approche de l'unité, obéissent à des lois bien plus compliquées, encore inconnues, et ne paraissent pas même compatibles avec la parfaite continuité du fluide et surtout de ses mouvements, puisqu'il s'y produit fréquemment des mascarets.

Je me propose de donner ici une théorie à peu près complète des premiers [*], en me bornant au cas d'un liquide en repos, cas auquel

---

[*] Une partie de ce Mémoire a déjà été résumée dans deux articles présentés, le 19 juin et le 24 juillet 1871, à l'Académie des Sciences, et insérés aux *Comptes rendus* des séances de ces jours (t. LXXII, p. 755, et t. LXXIII, p. 256).

on vient de voir que se ramène celui d'un liquide en mouvement, et en prenant pour point de départ de mon analyse le caractère qui les distingue essentiellement des autres mouvements ondulatoires des liquides : ce caractère consiste en ce que les vitesses horizontales des molécules fluides y sont sensiblement égales dans toute l'étendue d'une même section normale du canal. L'extrême *longévité* de l'onde solitaire prouve d'ailleurs que, dans ces phénomènes, les frottements ont très-peu d'action dès que le mouvement s'est régularisé, et qu'on peut admettre avec une approximation suffisante la fluidité parfaite, c'est-à-dire l'égalité de pression en tous sens : comme, d'autre part, les composantes u, v, w de la vitesse suivant trois axes rectangulaires fixes des x, y, z sont nulles autour d'une molécule quelconque avant que l'onde l'atteigne, elles y vaudront à toute époque, d'après un théorème connu de Lagrange et de Cauchy, les trois dérivées partielles en x, y, z d'une fonction φ. Le caractère distinctif de la classe des phénomènes étudiés permet d'obtenir φ en série convergente ne contenant pas d'autre inconnue que la vitesse aux divers points du fond. Cette série, substituée à φ dans des formules connues de l'hydrodynamique, fournit, entre la profondeur sur les diverses sections normales et la vitesse aux divers points du fond, deux équations aux dérivées partielles par rapport au temps et par rapport à la coordonnée longitudinale x. A une première approximation, c'est-à-dire en négligeant tous les termes très-petits en comparaison du rapport de la hauteur de l'intumescence à la profondeur primitive, ces deux équations conduisent à la loi remarquable de Lagrange, seul résultat théorique qui eût été obtenu sur ce sujet avant mon article des *Comptes rendus* relatif à l'onde solitaire : elle consiste en ce que toute intumescence de petite hauteur, positive ou négative, se propage en conservant sa forme et avec une vitesse égale à la racine carrée du produit de la gravité par la profondeur primitive.

Cette loi cesse d'être vraie à une deuxième approximation. Il n'y a plus alors, si ce n'est pour certains phénomènes particuliers, une vitesse de propagation commune à toute l'onde, et il convient de diviser l'intumescence, à partir de sa tête, en parties infiniment petites de volume constant, comprises entre des plans consécutifs normaux à l'axe du canal, et positives ou négatives suivant que leur hauteur,

qui est l'excès de la profondeur actuelle aux points où elles se trouvent sur la profondeur primitive, l'est elle-même. Considérant à part chacune de ces parties, je démontre que le carré de sa vitesse de propagation est égal, à un instant donné quelconque, au produit de la gravité g par la somme : 1° de la profondeur primitive, 2° d'une fois et demie la hauteur actuelle de la partie considérée de l'intumescence, et 3° de la courbure qu'y affecte la surface libre, multipliée par l'inverse de la même hauteur et par le tiers du cube de la profondeur primitive.

Il est particulièrement intéressant d'étudier le mouvement du centre de gravité général de l'onde, en appelant ainsi un point tel que le produit de chacune de ses deux coordonnées, horizontale et verticale, par le volume total de l'intumescence, vaille la somme des diverses parties élémentaires de l'intumescence, respectivement multipliées par la coordonnée pareille de leurs milieux. Le carré de sa vitesse de propagation est égal au produit du nombre g par la profondeur primitive, augmentée de trois fois la hauteur, positive ou négative, du centre de gravité considéré au-dessus de la surface libre initiale. Cette hauteur reste constante aux divers instants du mouvement [*] : son invariabilité provient de ce que, multipliée par le double du volume de l'intumescence et par le poids de l'unité de volume du liquide, elle devient sensiblement égale à l'énergie totale et constante de l'onde, c'est-à-dire au travail que produirait l'onde si l'on remettait le fluide instantanément en repos [**].

Le volume total d'une intumescence et son énergie ne sont pas les deux seules intégrales qui restent constantes pendant le mouvement, et qui caractérisent ainsi chaque intumescence. Il y en a encore une

---

[*] Cela n'empêche pas l'intumescence de s'aplatir parfois indéfiniment : il faut et il suffit pour cela qu'elle se décompose en parties alternativement positives et négatives, s'allongeant de plus en plus, et dont la somme algébrique seule représente sa valeur constante; le centre de gravité de toutes les parties positives et celui de toutes les parties négatives deviendront très-rapprochés de la surface libre initiale, quoique le centre de gravité général, situé sur le prolongement de la droite qui les joint, se maintienne toujours à la même hauteur.

[**] Il est évident que je fais ici abstraction des frottements : leur effet est de diminuer un peu, d'un instant à l'autre, l'énergie de l'onde, et par suite de rapprocher sans cesse de la surface libre primitive le centre de gravité de l'intumescence.

troisième, dont on obtient les divers éléments en divisant, comme il a été dit, l'intumescence en parties infiniment petites par des sections normales, et en multipliant la distance de deux consécutives de ces sections par le carré de l'angle que la surface libre actuelle y fait avec la surface libre primitive, carré diminué de trois fois le cube du rapport de la hauteur qu'y a l'intumescence à la profondeur initiale. J'appelle cette intégrale *moment d'instabilité de l'onde*, pour une raison qu'on verra bientôt.

Il est naturel de chercher si, parmi toutes les formes possibles que peut affecter le profil longitudinal d'une intumescence, il n'en existe pas une qui donne à toutes les parties la même vitesse de propagation, de manière que l'onde avance sans se déformer. S'il y a une forme pareille, il est probable que les ondes l'acquerront souvent dans la période initiale du mouvement, en vertu du principe général d'après lequel les phénomènes tendent vers un état permanent toutes les fois qu'une cause persistante n'y met pas obstacle. Or je démontre qu'une forme pareille existe effectivement quand l'intumescence est positive et d'un volume assez petit, mais seulement dans ce cas. Cette forme, dont j'obtiens l'équation finie sans autre transcendante qu'un cosinus hyperbolique, est celle d'une courbe telle que le produit de chacune de ses ordonnées par le cube d'une ligne constante est égal au produit des deux parties en lesquelles l'ordonnée considérée divise la surface totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. Elle est symétrique par rapport à la verticale menée par son sommet, et a deux points d'inflexion situés aux deux tiers de sa hauteur; entre ces deux points elle est convexe, en deçà et au delà elle est concave, et va se raccorder asymptotiquement au profil longitudinal primitif de la surface libre. Sa hauteur totale est égale aux trois seizièmes du carré du volume de l'intumescence par unité de largeur du canal, divisés par le cube de la profondeur primitive : pour une onde d'une énergie donnée, cette hauteur augmente, tandis que la base décroît, quand la profondeur diminue, et l'on conçoit que le déferlement se produise lorsque l'exhaussement devient exagéré. Enfin, l'onde a son centre de gravité au tiers de sa hauteur, ce qui, d'après une loi précédente, donne pour le carré de sa vitesse de propagation le produit du nombre g par la distance qu'il y a de son sommet au fond du canal. L'intumescence est

donc bien alors, avec toutes les circonstances qui la caractérisent, l'onde solitaire de Scott Russell.

Il reste à expliquer la formation fréquente de cette espèce particulière d'ondes et leur singulière stabilité. J'y parviens en démontrant qu'une onde solitaire est, parmi toutes les intumescences douées d'une égale énergie, celle pour laquelle l'intégrale que j'ai appelée *moment d'instabilité* a sa plus petite valeur, et même la seule qui rende cette intégrale maximum ou minimum. Il en résulte que, si une intumescence diffère peu à un instant donné, sous le rapport de la forme, de l'onde solitaire de même énergie, elle en différera peu à toute époque : car elle ne pourrait s'en écarter notablement sans que son moment d'instabilité grandît d'une manière sensible, ce qui est impossible, puisque ce moment est invariable. La forme vraie de l'intumescence oscillera donc sans cesse autour de celle d'une onde solitaire, ou plutôt les frottements, que nous avons négligés, et qui ont une influence notable au commencement de la propagation, ne tarderont pas à annuler ses petites variations et à donner à l'onde une forme permanente, tout comme ils font revenir assez promptement à leurs positions d'équilibre stable un système de points matériels qui en ont été peu écartés. Et, de même que cette action des frottements peut amener de très-loin certains corps à leur état d'équilibre, on conçoit qu'elle puisse changer en ondes solitaires des intumescences qui d'abord en différaient beaucoup.

Entre plusieurs intumescences de même énergie, celles dont le profil s'écarte le plus de celui d'une onde solitaire, et qui, par suite, sont les plus changeantes d'aspect d'un moment à l'autre, ont aussi, d'après ce qui précède, les moments d'instabilité les plus grands : ces moments méritent donc bien le nom que je leur ai donné, puisqu'ils représentent en quelque sorte, par leurs grandeurs relatives, la rapidité et l'amplitude des transformations que subit chaque onde.

La production d'une forme stable est impossible dans les deux cas d'une onde négative et d'une intumescence continue, et même dans celui d'une intumescence positive et finie trop considérable, qui ne pourrait se changer en une onde solitaire unique sans acquérir une hauteur excessive et devenir par suite instable. Dans ces trois cas, la théorie permet, non-seulement d'obtenir les formules expérimentales

des vitesses de propagation, mais encore d'expliquer les diverses circonstances qui se produisent, telles que la formation, à la queue d'une onde négative, d'une série d'autres ondes plus petites, alternativement positives et négatives, et, à la tête d'une intumescence continue positive, celle de renflements dont le premier et le plus élevé est l'onde initiale de M. Bazin.

Il est un cas dans lequel la surface de l'onde peut avoir en tous ses points une très-petite courbure, de manière que, les molécules fluides décrivant des lignes sensiblement droites et parallèles, la pression varie hydrostatiquement sur toute l'étendue d'une même section : c'est celui d'une dépression de longueur indéfinie, dont les parties ont des profondeurs lentement croissantes de l'une à l'autre à mesure qu'on s'éloigne de sa tête, comme il s'en produit à l'embouchure d'un canal lors du retrait d'une crue. Dans ce cas, on peut obtenir les diverses circonstances du phénomène, soit en employant les formules générales, soit en se servant d'une équation du *mouvement non permanent* des eaux, donnée par M. de Saint-Venant dans un Mémoire inséré aux *Comptes rendus* (t. LXXIII, p. 147 et 237, 17 et 24 juillet 1871) : cette équation comprend comme cas particulier celle dont on se sert dans l'étude du mouvement permanent par filets sensiblement rectilignes; mais, étant établie, comme celle-ci, sur l'hypothèse que les pressions varient hydrostatiquement aux divers points d'une même section, elle ne peut pas être appliquée aux cas où la surface libre a une courbure sensible [*]. Si on voulait l'employer, par exemple, dans l'étude de l'onde solitaire, on trouverait pour profil longitudinal de la surface libre, non pas une courbe symétrique par rapport à la verticale menée

[*] La même observation s'applique à une théorie de M. Partiot, résumée dans un article des *Comptes rendus* (t. LXXIII, p. 91, 10 juillet 1871) et complétée dans le Mémoire cité des 17 et 24 juillet 1871 (p. 147 et 237) de M. de Saint-Venant, qui obtient du reste ainsi les mêmes résultats que par sa propre méthode. M. Partiot considère les intumescences de hauteur finie comme résultant de la superposition d'intumescences successives infiniment petites, dont chacune est supposée régie par la loi simple de Lagrange, bien que propagée par-dessus toutes les intumescences précédentes, c'est-à-dire dans une eau dont la surface a cessé d'être horizontale et même en général plane. Une telle assimilation n'est pas suffisamment exacte lorsque la surface acquiert une courbure sensible.

par son sommet, mais une ligne en pente de plus en plus douce d'un instant à l'autre du côté de la queue de l'onde, et surplombant verticalement du côté de sa tête. L'onde déferlerait donc sans cesse, si petite que fût d'ailleurs sa hauteur par rapport à la profondeur primitive. C'est également le résultat auquel on est conduit lorsqu'on veut appliquer la formule usuelle du mouvement permanent aux points d'un cours d'eau où la courbure des filets est sensible, c'est-à-dire aux ressauts; cette formule conduit à admettre en ces points une surface libre surplombante, ou ayant un plan tangent vertical, circonstance que les ressauts n'offrent qu'exceptionnellement et peut-être jamais. Mais l'application au retrait assez lent des crues de l'équation donnée par M. de Saint-Venant est parfaitement légitime. Les lois principales de ce phénomène, déjà établies dans le Mémoire cité (formules 24 et 26), bien qu'en supposant la vitesse moyenne dans toute section simplement fonction de la profondeur (hypothèse dont on peut se passer quand il s'agit d'ondes peu profondes), consistent en ce que : 1° la vitesse moyenne sur chaque section est égale à deux fois la racine carrée du nombre g, multipliée par la différence de la racine carrée de la profondeur actuelle et de celle de la profondeur primitive; 2° chaque ordonnée verticale comprise depuis le fond jusqu'à la surface libre se transporte (en apparence), dans le sens de la propagation de l'onde, avec une vitesse égale à la racine carrée du nombre g, multipliée par l'excès du triple de la racine carrée de cette ordonnée sur le double de celle de la profondeur primitive.

§ I. — *Équations fondamentales.*

Soient : x, y, z les coordonnées, par rapport à trois axes rectangulaires fixes, d'un point de l'espace occupé à l'époque t par une molécule d'un fluide; p la pression en ce point [*]; ρ la densité, supposée

[*] L'hypothèse de la fluidité ou mobilité parfaite, qui n'est jamais complétement réalisée, consiste à regarder comme nulle toute résistance au glissement réciproque de deux parties adjacentes de matière, ou à supposer normale la pression exercée sur tous les éléments plans que l'on peut concevoir à l'intérieur du corps considéré, liquide ou

une fonction donnée de p; u, v, w les composantes, suivant les trois axes, de la vitesse au même point, composantes qu'on admet être des fonctions continues de x, y, z, t [*]; enfin X, Y, Z les composantes de l'action extérieure rapportée à l'unité de masse. On sait que les trois équations indéfinies des mouvements sont

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - \left(\frac{du}{dt}\right),\quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - \left(\frac{dv}{dt}\right),\quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - \left(\frac{dw}{dt}\right),$$

dans lesquelles $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ désignent les dérivées de u, v, w prises, par rapport au temps, en suivant une même molécule, c'est-à-dire les rapports à dt des accroissements que reçoivent u, v, w lorsqu'on y fait grandir t de dt, x de udt, y de vdt, z de wdt; leurs expressions sont

$$(2)\qquad \left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},\quad \left(\frac{dv}{dt}\right) = \ldots,\quad \left(\frac{dw}{dt}\right) = \ldots.$$

Il faut y joindre l'équation de continuité

$$(3)\qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0,$$

---

gaz : il suit des formules bien connues qu'on déduit de la considération du tétraèdre de Cauchy qu'une telle pression a forcément la même valeur pour tous les éléments plans qui se croisent en un même point, et qu'elle est, par suite, une simple fonction de x, y, z, t.

[*] Lorsque les frottements, ou actions tangentielles exercées par les fluides naturels en mouvement en outre des pressions normales, ont des valeurs relativement trop faibles pour qu'il soit nécessaire de les faire entrer dans les équations (comme lorsqu'on étudie l'écoulement par les orifices en mince paroi ou par les déversoirs et les phénomènes si divers des ondes de toute espèce), leur importance, bien que moins visible, n'est pas moindre pour cela. Ce sont, en effet, ces actions tangentielles qui produisent la continuité des mouvements, c'est-à-dire qui empêchent deux molécules très-voisines d'avoir des vitesses notablement différentes : or les questions d'hydrodynamique dans lesquelles on fait abstraction des frottements et qui ont pu être traitées jusqu'à ce jour ne sont des problèmes déterminés qu'autant qu'on y suppose la continuité parfaite des mouvements du fluide.

et les conditions spéciales aux surfaces limites du fluide, conditions dont l'une, applicable à toutes ces surfaces et résultant de l'hypothese même de la continuité des mouvements, exprime que les mêmes molécules fluides y restent toujours, et dont l'autre revient, pour les parois, à les supposer fixes ou à supposer connus leurs mouvements, et, pour les autres surfaces limites, à égaler la pression exercée de part et d'autre de leurs divers éléments plans.

Cauchy a démontré d'une manière très-remarquable, dans la deuxième partie de son *Mémoire sur la théorie des ondes*, 1816 (*Savants étrangers*, t. I, 1827), et pour le cas des fluides pesants ou plus généralement des fluides dans lesquels les composantes X, Y, Z de l'action extérieure égalent respectivement les trois dérivées en x, y, z d'une fonction Φ, que, si les trois expressions

$$\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}$$

sont nulles autour d'une molécule à un certain moment, elles le seront à toute époque. Pour cela, Cauchy observe que u, v, w, p peuvent être regardés, soit comme dépendant de t et des coordonnées actuelles x, y, z des molécules, soit comme dépendant de t et de leurs coordonnées initiales x_0, y_0, z_0; car il est évident que les coordonnées actuelles x, y, z sont des fonctions parfaitement déterminées de ces coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 et du temps t. On aura donc, par exemple,

$$\frac{dp}{dx_0} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dx_0} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx_0} + \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx_0},$$

ou bien, en remplaçant les trois dérivées de p en x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (1) et en rappelant que X, Y, Z sont les trois dérivées partielles en x, y, z d'une fonction Φ,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_0} = \frac{d\Phi}{dx_0} - \left(\frac{du}{dt}\right)\frac{dx}{dx_0} - \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dy}{dx_0} - \left(\frac{dw}{dt}\right)\frac{dz}{dx_0};\\
&\text{on trouverait de même}\\
&\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy_0} = \frac{d\Phi}{dy_0} - \left(\frac{du}{dt}\right)\frac{dx}{dy_0} - \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dy}{dy_0} - \left(\frac{dw}{dt}\right)\frac{dz}{dy_0},\\
&\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz_0} = \frac{d\Phi}{dz_0} - \left(\frac{du}{dt}\right)\frac{dx}{dz_0} - \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dy}{dz_0} - \left(\frac{dw}{dt}\right)\frac{dz}{dz_0}.
\end{aligned}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité de la fonction p seront au nombre de trois; l'une d'elles s'obtiendra en différentiant la seconde (4) par rapport à z_0, la troisième par rapport à y_0, et prenant la différence des résultats. Observons : 1° que ρ est supposé une simple fonction de p; 2° que $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ sont précisément les dérivées partielles de u, v, w par rapport à t lorsque les coordonnées primitives sont prises pour variables indépendantes, puisqu'on obtient ces trois dérivées en suivant une même molécule, c'est-à-dire sans faire varier x_0, y_0, z_0; 3° enfin, que u, v, w sont respectivement les trois dérivées partielles de x, y, z par rapport à t; et il viendra

$$(5)\qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{du}{dz_0}\frac{dx}{dy_0} - \frac{du}{dy_0}\frac{dx}{dz_0} + \frac{dv}{dz_0}\frac{dy}{dy_0} - \frac{dv}{dy_0}\frac{dy}{dz_0} + \frac{dw}{dz_0}\frac{dz}{dy_0} - \frac{dw}{dy_0}\frac{dz}{dz_0}\right] = 0.$$

On peut, dans la parenthèse de cette relation, remplacer les dérivées de u, v, w en x_0, y_0, z_0 par leurs valeurs

$$\frac{du}{dx_0} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dx_0} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx_0} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx_0}, \quad \frac{du}{dy_0} = \ldots, \text{ etc.};$$

en faisant, pour abréger,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} 1+\theta = {} & \frac{dx}{dx_0}\frac{dy}{dy_0}\frac{dz}{dz_0} - \frac{dx}{dx_0}\frac{dy}{dz_0}\frac{dz}{dy_0} - \frac{dy}{dy_0}\frac{dz}{dx_0}\frac{dx}{dz_0} \\ & - \frac{dz}{dz_0}\frac{dx}{dy_0}\frac{dy}{dx_0} + \frac{dx}{dy_0}\frac{dy}{dz_0}\frac{dz}{dx_0} + \frac{dx}{dz_0}\frac{dy}{dx_0}\frac{dz}{dy_0}, \end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(7)\qquad \mathfrak{p} = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}, \quad \mathfrak{q} = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}, \quad \mathfrak{r} = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}.$$

on trouve ainsi que cette parenthèse revient identiquement à

$$\mathfrak{p}\frac{d\theta}{d\frac{dx}{dx_0}} + \mathfrak{q}\frac{d\theta}{d\frac{dy}{dx_0}} + \mathfrak{r}\frac{d\theta}{d\frac{dz}{dx_0}}.$$

D'après (5), elle ne dépend pas du temps, et il en est évidemment de même de deux autres pareilles, qu'on en déduirait par le simple changement de x_0 en y_0 et puis en z_0. Ces trois expressions ayant

les mêmes valeurs qu'à l'époque $t = 0$, époque à laquelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, si l'on appelle $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{r}_0$ leurs valeurs initiales, qui sont celles de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ et qui dépendent seulement de x_0, y_0, z_0, il viendra

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{p}\frac{d\theta}{d\frac{dx}{dx_0}} + \mathfrak{q}\frac{d\theta}{d\frac{dy}{dx_0}} + \mathfrak{r}\frac{d\theta}{d\frac{dz}{dx_0}} = \mathfrak{p}_0,\\ &\mathfrak{p}\frac{d\theta}{d\frac{dx}{dy_0}} + \mathfrak{q}\frac{d\theta}{d\frac{dy}{dy_0}} + \mathfrak{r}\frac{d\theta}{d\frac{dz}{dy_0}} = \mathfrak{q}_0,\\ &\mathfrak{p}\frac{d\theta}{d\frac{dx}{dz_0}} + \mathfrak{q}\frac{d\theta}{d\frac{dy}{dz_0}} + \mathfrak{r}\frac{d\theta}{d\frac{dz}{dz_0}} = \mathfrak{r}_0. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations respectivement multipliées par $\frac{dx}{dx_0}$, $\frac{dx}{dy_0}$, $\frac{dx}{dz_0}$, ou par $\frac{dy}{dx_0}$, $\frac{dy}{dy_0}$, $\frac{dy}{dz_0}$, ou enfin par $\frac{dz}{dx_0}$, $\frac{dz}{dy_0}$, $\frac{dz}{dz_0}$, et ajoutées, donnent, comme conditions d'intégrabilité de la fonction p,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{p}(1+\delta) &= \mathfrak{p}_0\frac{dx}{dx_0} + \mathfrak{q}_0\frac{dx}{dy_0} + \mathfrak{r}_0\frac{dx}{dz_0},\\ \mathfrak{q}(1+\delta) &= \mathfrak{p}_0\frac{dy}{dx_0} + \mathfrak{q}_0\frac{dy}{dy_0} + \mathfrak{r}_0\frac{dy}{dz_0},\\ \mathfrak{r}(1+\delta) &= \mathfrak{p}_0\frac{dz}{dx_0} + \mathfrak{q}_0\frac{dz}{dy_0} + \mathfrak{r}_0\frac{dz}{dz_0}. \end{aligned}\right.$$

Ce sont trois intégrales premieres, trouvées par Cauchy, des équations de l'hydrodynamique. Le déterminant (6) y revient exactement à ce que j'appelle $1 + \delta$ dans la formule (1) de ma *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers*, t. XX), comme on peut s'en convaincre en remplaçant, dans (6), x, y, z par leurs valeurs primitives x_0, y_0, z_0, augmentées de leurs trois accroissements appelés déplacements de la molécule considérée; ce déterminant représente, ainsi qu'on peut le voir dans le Mémoire cité, ce qu'est devenu un volume fluide primitivement égal à un; par suite, δ exprime à chaque instant la dilatation éprouvée par la matière qui environne la molécule dont les coordonnées primitives sont x_0, y_0, z_0.

Si, pour une certaine valeur de x_0, y_0, z_0, c'est-à-dire autour d'une

certaine molécule, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ sont nuls à un seul moment, les formules (8) donneront, autour de cette molécule, $\mathfrak{p}_0 = 0$, $\mathfrak{q}_0 = 0$, $\mathfrak{r}_0 = 0$, et par suite on y aura à toute époque, d'après (9), $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{r} = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Il suffit que chaque partie du fluide soit en repos un instant, comme il arrive, lors de la propagation d'ondes ou de remous, avant que le mouvement ait envahi les parties considérées, pour que les différences $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ y soient nulles en ce moment et, par suite, toujours. Nous aurons donc, dans tous les phénomènes que nous allons étudier,

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx},$$

ou bien, en appelant φ une certaine fonction de x, y, z, t,

$$(10) \qquad u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Ces relations permettent, comme on sait, d'intégrer une fois les équations (1), respectivement multipliées par dx, dy, dz et ajoutées. En se bornant au cas d'un liquide pesant incompressible, et supposant l'axe des z vertical et dirigé en haut, ce qui donne $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, il vient l'équation connue

$$(11) \qquad \frac{p}{\rho} = -gz - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right) + \text{fonction arbitraire de } t,$$

et, d'autre part, la condition de continuité (3) se réduit à

$$(12) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Supposons le liquide contenu dans un bassin à fond horizontal et agité de telle sorte que les composantes horizontales u, v de la vitesse aient presque les mêmes valeurs, à un instant quelconque, pour toutes les molécules situées sur une même verticale, ce qui est le caractère distinctif des phénomènes que je me propose d'étudier. En prenant le fond pour plan des xy, appelant φ_0 la valeur de φ aux divers points de ce

plan, valeur qui est une fonction de x, y, t, et observant que la quantité w ou $\frac{d\varphi}{dz}$ doit être nulle pour $z = 0$ d'après la condition spéciale aux parois, on aura évidemment

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^z dz \int_0^z \frac{d^2\varphi}{dz^2} dz,$$

ou bien, d'après (12),

$$(13) \qquad \varphi = \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) dz.$$

On peut, dans le second membre de cette formule, remplacer $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, c'est-à-dire les vitesses u, v, par les valeurs très-peu différentes u_0, v_0 ou $\frac{d\varphi_0}{dx}$, $\frac{d\varphi_0}{dy}$ que ces vitesses ont aux points du fond situés sur les mêmes verticales : on aura ainsi

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1.2}\left(\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_0}{dy^2}\right).$$

Cette expression approchée de φ, substituée encore dans le second membre de (13), permettra d'obtenir, par approximations successives, φ en série convergente. Si, afin d'abréger, on représente

par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$,

il viendra finalement

$$(14) \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1.2}\Delta_2\varphi_0 + \frac{z^4}{1.2.3.4}\Delta_2\Delta_2\varphi_0 - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}\Delta_2\Delta_2\Delta_2\varphi_0 + \ldots$$

la fonction φ est ainsi exprimée en fonction des valeurs qu'elle a aux divers points du fond.

Cherchons actuellement les deux conditions spéciales à la surface libre. J'appellerai : p_0 la pression atmosphérique, que je supposerai à chaque instant la même partout; H la profondeur constante du liquide dans les parties non encore agitées; H + une petite quantité h la profondeur, variable en fonction de x, y, t, dans les parties agitées; enfin je poserai

$$(15) \qquad p = p_0 + \rho g(\mathrm{H} + h - z) + \mathrm{P},$$

P désignant la partie de la pression qui ne varie pas d'après la loi hydrostatique, et je conviendrai de faire nulle la fonction φ aux points très-éloignés où le mouvement ne se propagera pas de longtemps, ce qui est évidemment permis sans changer nulle part les dérivées en x, y, z de cette fonction. La formule (11) deviendra

$$\frac{P}{\rho} = -gh - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right) + \text{une fonction arbitraire de } t.$$

La fonction arbitraire de t se détermine en observant qu'aux points très-éloignés où $\varphi = 0$, les quatre dérivées de φ en x, y, z, t et les quantités P et h s'annulent à la fois : cette fonction arbitraire est donc nulle, et l'on a, pour déterminer la partie de la pression qui ne varie pas hydrostatiquement, la relation

$$(16) \qquad P = -\rho\left[gh + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)\right].$$

La première condition spéciale à la surface libre consiste à y faire $P = 0$. La seconde doit exprimer qu'une molécule superficielle se ment sans quitter cette surface, et, par conséquent, que, si l'on suit une molécule pareille en faisant croître dans l'équation de la surface libre t de dt, x de udt, y de vdt, l'ordonnée $H + h$, aux points successifs où se trouve cette molécule, croîtra de wdt. On aura donc

$$(17) \qquad \text{(à la surface libre)} \begin{cases} gh + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \\ w = \frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx}u + \frac{dh}{dy}v. \end{cases}$$

Je me propose d'étudier seulement des mouvements propagés le long d'un canal de longueur indéfinie et de section rectangulaire normale au plan des xz, de manière à n'avoir à considérer que des vitesses parallèles à ce plan, indépendantes de y, et par suite des formes cylindriques de la surface libre. La fonction φ_0 ne dépendra, comme la partie variable h de la profondeur, que des deux variables x et t, et, si l'on suppose que le mouvement se propage du côté des x

positifs, u_0 et φ_0 seront nuls pour x infini. On aura

$$\varphi_0 = -\int_x^\infty \frac{d\varphi_0}{dx}\,dx = -\int_x^\infty u_0\,dx;$$

la formule (14), devenue simplement

$$(18)\quad \varphi = -\int_x^\infty u_0\,dx - \frac{z^2}{1.2}\frac{du_0}{dx} + \frac{z^4}{1.2.3.4}\frac{d^3u_0}{dx^3} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{d^5u_0}{dx^5} + \ldots,$$

permettra, si l'on n'oublie pas que u, w sont les deux dérivées de φ en x et z, de changer les relations (17) en celles-ci :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} & gh - \int_x^\infty \frac{du_0}{dt}\,dx - \frac{(H+h)^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx\,dt} + \ldots \\ & \quad + \frac{1}{2}\left\{\left[u_0 - \frac{(H+h)^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \ldots\right]^2 + \left(-\frac{H+h}{1}\frac{du_0}{dx} + \ldots\right)^2\right\} = 0, \\ & -\frac{H+h}{1}\frac{du_0}{dx} + \frac{(H+h)^3}{1.2.3}\frac{d^3u_0}{dx^3} - \ldots = \frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx}\left(u_0 - \frac{(H+h)^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Ce sont deux équations en h et u_0 qui régissent les variations de ces deux fonctions de x et t. Si l'on parvient à déterminer ces fonctions, les formules (18) et (16) donneront ensuite les vitesses u, w et la pression non-hydrostatique P en tous les points du fluide.

La partie variable h de la profondeur et, par suite, la vitesse au fond u_0 seront supposées très-petites, et leurs dérivées successives en x de plus en plus petites, de manière que la série (18) soit rapidement convergente. A une première approximation, on pourra négliger, dans chacune des relations (19), les termes par rapport auxquels d'autres seront très-grands, c'est-à-dire, en particulier, dans la première, tous ceux qui sont très-petits en comparaison de u_0, et, dans la seconde, tous ceux qui sont très-petits en comparaison de $\frac{du_0}{dx}$. Ces deux formules se trouveront ainsi réduites à

$$(20)\qquad \int_x^\infty \frac{du_0}{dt}\,dx = gh, \quad \frac{dh}{dt} = -H\frac{du_0}{dx}.$$

La première de celles-ci, différentiée deux fois par rapport à x, multi-

pliée par H, et ajoutée à la seconde différentiée par rapport à t, donne

$$(21)\qquad \frac{d^2h}{dt^2} = gH\,\frac{d^2h}{dx^2}.$$

C'est l'équation différentielle approchée déjà trouvée par Lagrange pour représenter le mouvement des ondes dans un canal peu profond. Son intégrale générale est

$$(22)\qquad h = f(x - t\sqrt{gH}) + f_1(x + t\sqrt{gH}),$$

où f et f_1 désignent deux fonctions arbitraires. La seconde relation (20) devient ainsi

$$\frac{du_0}{dx} = \sqrt{\frac{g}{H}}\left[f'(x - t\sqrt{gH}) - f_1'(x + t\sqrt{gH})\right],$$

ou bien, en multipliant par dx et intégrant,

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}}\left[f(x - t\sqrt{gH}) - f_1(x + t\sqrt{gH}) + \text{une fonction arbitr. } F(t)\right].$$

Cette valeur de u_0, portée dans la première (20), ne la vérifie qu'autant que $F'(t) = 0$. La fonction $F(t)$ se réduit donc à une constante, dont on peut supposer une moitié implicitement comprise dans la fonction f, et l'autre moitié retranchée de la fonction f_1, de manière à avoir

$$(23)\qquad u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}}\left[f(x - t\sqrt{gH}) - f_1(x + t\sqrt{gH})\right],$$

sans cependant que la somme $f + f_1$, qui doit rester égale à h, soit modifiée.

Les deux fonctions arbitraires f et f_1 se détermineront en exprimant que, pour $t = 0$, h et u_0 sont deux fonctions données de x. Comme je me propose d'étudier seulement des intumescences propagées vers les x positifs, je pourrai admettre qu'on ait choisi l'origine des x de manière que, pour $t = 0$, u_0 et h soient nuls ou du moins complétement insensibles pour toutes les valeurs positives de x. Les deux formules (22) et (23) donneront alors $f(x) = 0$ et $f_1(x) = 0$ pour $x > 0$, et les fonctions f et f_1 seront nulles pour toutes les valeurs positives de leurs variables. Si l'on ne considère que des valeurs

de x supérieures à $-t\sqrt{gH}$, c'est-à-dire telles que $x+t\sqrt{gH}$ soit >0, les relations (22) et (23) se réduiront donc à

$$(24)\qquad h=f(x-t\sqrt{gH}),\quad u_0=\sqrt{\frac{g}{H}}\,h.$$

Or, comme on se propose de n'étudier que ce qui est propagé vers les x positifs, toutes les parties de l'intumescence qui ne seront pas très-éloignées de sa tête auront bientôt des x plus grands que $-t\sqrt{gH}$ et l'on pourra s'en tenir aux formules (24), au lieu des relations plus générales (22) et (23).

La première (24) exprime que chaque valeur de h se propage le long du canal avec une vitesse égale à $\sqrt{gH}$, ou que la surface libre est animée d'un simple mouvement de translation parallèle au fond du canal et dont la vitesse est celle d'un corps tombant en chute libre d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur primitive.

Passons à une seconde approximation [*]. Il faut alors conserver : 1° dans la première équation (19) le troisième terme, et le terme u_0^2 de la parenthèse qui termine le premier membre, tous les termes qui suivent ceux-là étant évidemment bien plus petits; 2° dans la seconde (19), la partie $-h\frac{du_0}{dx}$ du premier terme, plus le second terme et le deuxième du second membre. Seulement ces termes très-petits pourront être évalués en y substituant à h et u_0 leurs valeurs (24) résultant d'une première approximation, car il n'en résultera que des erreurs négligeables en comparaison de ces termes mêmes. Les formules (19) de-

[*] Les termes introduits par cette seconde approximation sont analogues à ceux qui représentent les perturbations séculaires dans les mouvements des corps célestes, c'est-à-dire qu'ils acquièrent une influence notable au bout d'un temps assez long, mais restent négligeables dans les phénomènes de peu de durée. Par exemple, on peut les supprimer et conserver aux intégrales du problème la forme simple (22) et (23), lorsque le canal, au lieu d'être indéfini, est limité du côté des x positifs par une paroi normale à l'axe des x, et qu'on se propose d'étudier la réflexion d'une onde contre cette paroi. La condition spéciale $u_0=0$, qui devra s'y trouver vérifiée à toute époque, reviendra à considérer le canal comme indéfini, mais à superposer à l'onde directe, supposée se propager sans réflexion, celle de sens inverse qui lui serait à toute époque parfaitement symétrique par rapport à la paroi réfléchissante.

viennent ainsi

$$(25)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty \frac{du_0}{dt}\,dx = gh + \frac{g}{2}\left(\frac{h^2}{H} + H^2\frac{d^2h}{dx^2}\right), \\ \displaystyle\frac{dh}{dt} = -H\frac{du_0}{dx} - \sqrt{gH}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{h^2}{H} - \frac{H^2}{6}\frac{d^2h}{dx^2}\right). \end{cases}$$

Différentions la seconde (25) par rapport à t, en observant que la parenthèse très-petite qui la termine peut être regardée comme une simple fonction de $x - t\sqrt{gH}$ et a sa dérivée en t égale au produit de sa dérivée en x par $-\sqrt{gH}$; puis ajoutons au résultat la première (25), différentiée deux fois par rapport à x et multipliée par H. Il viendra l'équation

$$(26)\qquad \frac{d^2h}{dt^2} = gH\frac{d^2h}{dx^2} + gH\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right),$$

qui est la base de toute l'analyse suivante.

§ II. — *Vitesses de propagation des diverses parties d'une intumescence.*

J'appellerai *hauteur de l'intumescence* en un point donné la valeur de h en ce point, c'est-à-dire l'excès de la profondeur actuelle sur la profondeur primitive, et *volume de l'intumescence* la quantité totale de liquide qui se trouvera dans le canal, sur une largeur égale à l'unité, en plus de celle qu'il y aurait si le niveau primitif s'était conservé. La partie σ de ce volume comprise à l'époque t depuis la tête de l'onde jusqu'à la section normale dont l'abscisse est x aura pour expression

$$(27)\qquad \sigma = \int_x^\infty h\,dx.$$

L'intumescence sera : 1° ou limitée à son arrière, c'est-à-dire terminée du côté des x négatifs à une abscisse particulière au delà de laquelle les valeurs de h seront complétement insensibles, et, dans ce cas, elle aura un volume total fini Q, ou 2° illimitée, et j'en considérerai alors toute la partie comprise depuis la tête jusqu'à une abscisse x_0 très-

éloignée de cette tête, abscisse que je supposerai variable d'un moment à l'autre, de manière que le volume total de la partie considérée soit constant. En appelant Q ce volume, on aura donc

$$(28) \qquad Q = \int_{x_0}^{\infty} h\,dx,$$

formule applicable même au cas d'une onde limitée en y faisant $x_0 = -\infty$.

Chaque élément $h\,dx$ de l'intégrale (27) représente une partie de l'intumescence comprise entre deux plans normaux aux x et distants l'un de l'autre de dx : on peut supposer que ces plans avancent dans le sens des x positifs de manière que chacun ait toujours devant lui une partie constante de l'intumescence, et par suite de manière que l'élément $h\,dx$ ou $d\sigma$ d'intumescence que deux plans infiniment voisins comprennent entre eux soit constant aux divers instants successifs. La vitesse de propagation de chacun de ces plans sera celle de la partie d'intumescence adjacente. Cette vitesse, que j'appellerai ω, s'obtiendra en exprimant que le second membre de (27) ne varie pas lorsqu'on y fait croître t de dt et la limite inférieure x de l'intégrale de $\omega\,dt$. On a donc

$$-h\omega + \int_x^{\infty} \frac{dh}{dt}\,dx = 0,$$

ou bien, en différentiant par rapport à x,

$$(29) \qquad \frac{dh}{dt} + \frac{d.h\omega}{dx} = 0.$$

La formule (29) exprime la conservation de chaque élément de volume $d\sigma$ de l'intumescence : pendant un instant dt, la longueur dx de cet élément croît du produit de dt par la différence $\frac{d\omega}{dx}dx$ des vitesses de propagation des deux plans entre lesquels il est compris, tandis que sa hauteur h croît de sa différentielle, $\frac{dh}{dt}dt + \frac{dh}{dx}\omega\,dt$, obtenue en suivant l'un de ces plans; le produit des deux dimensions de l'élément étant constant, il vient, en divisant sa différentielle par $dx\,dt$,

$$\frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx}\omega + h\frac{d\omega}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (29).

La substitution à $\frac{dh}{dt}$ de sa valeur tirée de (29) rend immédiatement intégrable par rapport à x l'équation fondamentale (26). Celle-ci, en observant que h et ses dérivées sont nulles pour x infini, devient

$$(30)\qquad \frac{d.h\omega}{dt} + gH\frac{dh}{dx} + gH\frac{d}{dx}\left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right) = 0.$$

Cette nouvelle équation peut même être remplacée par une autre plus simple. Posons

$$(31)\qquad \psi = h(\omega - \sqrt{gH}) - \frac{\sqrt{gH}}{2}\left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right);$$

d'où il résulte (en se rappelant que la dérivée en t de la dernière parenthèse est égale au produit de sa dérivée en x par $-\sqrt{gH}$, sauf erreur négligeable par rapport à cette dérivée même)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d.h\omega}{dt} - \sqrt{gH}\frac{dh}{dt} + \frac{gH}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right).$$

Dans le second membre de celle-ci, substituons à $\frac{dh}{dt}$ et à $\frac{d.h\omega}{dt}$ leurs valeurs tirées de (29) et (30). Il viendra simplement

$$(32)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{gH}\frac{d\psi}{dx},$$

équation qui a pour intégrale, en appelant χ une fonction arbitraire,

$$(33)\qquad \psi = \chi(x + t\sqrt{gH}).$$

Comme il a été dit après les formules (24), h et ses dérivées en x sont supposées nulles, à l'époque $t = 0$, pour toutes les valeurs positives de x; on a donc à cette époque, d'après (31), $\psi = 0$ pour $x > 0$, et la fonction arbitraire $\chi(x)$ est nulle pour toutes les valeurs positives de sa variable. Or toutes les parties de l'intumescence qui ne sont pas très-loin de sa tête acquièrent bientôt des abscisses plus grandes que $-t\sqrt{gH}$, de manière à rendre positive la somme $x + t\sqrt{gH}$ et, par

suite, nulle la fonction ψ. On peut donc, dans l'étude de ces parties de l'onde, supposer $\psi = 0$, ou bien, en divisant par $h\sqrt{gH}$ la relation (31),

$$(34) \qquad \frac{\omega}{\sqrt{gH}} = 1 + \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2}.$$

Elevée au carré, cette formule donne sensiblement

$$(35) \qquad \omega^2 = g\left(H + \frac{3}{2}h + \frac{H^3}{3h}\frac{d^2h}{dx^2}\right).$$

D'où la loi suivante :

Le carré de la vitesse de propagation d'une partie quelconque de l'intumescence est égal au produit du nombre $g = 9^m,809$ par la somme de la profondeur primitive, d'une fois et demie la hauteur h de cette partie de l'intumescence, et du tiers de la courbure qu'y a la surface libre, multiplié par l'inverse de cette hauteur et par le cube de la profondeur primitive.

La relation (34) donnant ω en fonction de h et de sa dérivée seconde en x, l'équation (29) permet d'obtenir sous forme finie, avec une approximation suffisante, les variations de h qui se produisent pendant un temps assez court. Si l'on appelle ω_0 une quantité constante très-peu différente de $\sqrt{gH}$, mais d'ailleurs arbitraire, cette équation pourra s'écrire

$$(36) \qquad \frac{dh}{dt} + \omega_0\frac{dh}{dx} + \frac{d.h(\omega - \omega_0)}{dx} = 0;$$

son intégrale sera, pour t assez petit,

$$(37) \qquad h = f(x - \omega_0 t) - t\frac{d.h(\omega - \omega_0)}{dx},$$

comme on le reconnaît en portant cette expression de h dans (36), et en observant que, dans le dernier terme, très-petit par rapport au précédent tant que t est peu considérable, l'expression $h(\omega - \omega_0)$ du second ordre de petitesse peut être supposée une simple fonction de $x - \omega_0 t$, et a par suite sa dérivée en t sensiblement égale au produit de $-\omega_0$ par sa dérivée en x. Si, à un certain moment qu'on peut

choisir pour origine du temps, h est une fonction connue f de x, la formule (37) donnera bien h pour t assez petit, après qu'on aura, dans le dernier terme, remplacé ω par sa valeur tirée de (34) et ensuite h par $f(x - \omega_0 t)$.

L'équation (29), multipliée par h, donne encore, en désignant par $\left(\frac{dh}{dt}\right)$ la dérivée de h prise en suivant un même élément $d\sigma$ de l'intumescence, c'est-à-dire la somme $\frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx}\omega$,

$$(38) \qquad h\left(\frac{dh}{dt}\right) = -h^2\frac{d\omega}{dx} = -\frac{d.h^2\omega}{dx} + 2h\omega\frac{dh}{dx}.$$

Or, d'après (34),

$$(39) \qquad 2h\omega\frac{dh}{dx} = \sqrt{gH}\,\frac{d}{dx}\left(h^2 + \frac{h^3}{2H} + \frac{H^2}{6}\frac{dh^2}{dx^2}\right),$$

et par suite (38) devient, en divisant par h,

$$(40) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{dh}{dt}\right) &= -\sqrt{gH}\,\frac{1}{h}\frac{d}{dx}\left[\frac{h}{4H} + \frac{H^2}{6}\left(h\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{dh^2}{dx^2}\right)\right] \\ &= -\frac{\sqrt{gH}}{4H}\,\frac{1}{h}\frac{d}{dx}\left[h^3\left(1 + \frac{2H^2}{3}\,\frac{1}{h}\,\frac{d\frac{1}{h}\frac{dh}{dx}}{dx}\right)\right] \end{aligned}\right.$$

La formule (27) permet de remplacer partout $h\,dx$ par $-d\sigma$, et il vient

$$(40\ bis) \qquad \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\sqrt{gH}}{4H}\,\frac{d}{d\sigma}\left[h^3\left(1 + \frac{2H^2}{3}\,\frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma}\right)\right].$$

C'est l'équation aux dérivées partielles qui régit h, lorsqu'on choisit σ et t pour variables indépendantes.

Cherchons actuellement l'expression de u_0, et celles de u, v qui en résulteront. Si l'on remplace, dans la seconde relation (25), $\frac{dh}{dt}$ par sa valeur $-\frac{d.h\omega}{dx}$, dans laquelle ω est donné par (34), cette relation, multipliée par dx et intégrée avec la condition que, pour $x = \infty$

et ses dérivées en x s'annulent, donnera

$$(41)\qquad u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}}\left(h - \frac{h^2}{4H} + \frac{H^2}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right).$$

On peut remarquer que cette expression de u_0, portée dans la première (25), la vérifie, si l'on n'oublie pas que $\frac{dh}{dt}$ vaut $-\frac{d.h\omega}{dx}$ et que les termes du second ordre de petitesse ont leur dérivée en t sensiblement égale au produit de leur dérivée en x par $-\sqrt{gH}$.

Il résulte à fort peu près de la formule (18), différentiée respectivement par rapport à x et par rapport à z,

$$u = u_0 - \frac{z^2}{2}\frac{d^2u_0}{dx^2},\quad w = -z\frac{du_0}{dx} + \frac{z^3}{6}\frac{d^3u_0}{dx^3},$$

ce qui donne sensiblement, pour les deux composantes u, w de la vitesse en un point quelconque,

$$(42)\qquad \begin{cases} u = \sqrt{\frac{g}{H}}\left[h - \frac{h^2}{4H} + \left(\frac{H^2}{3} - \frac{z^2}{2}\right)\frac{d^2h}{dx^2}\right], \\ w = -z\sqrt{\frac{g}{H}}\left[\left(1 - \frac{h}{2H}\right)\frac{dh}{dx} + \frac{1}{3}\left(H^2 - \frac{z^2}{2}\right)\frac{d^3h}{dx^3}\right]. \end{cases}$$

Cherchons encore ce qu'on appelle la *vitesse moyenne*, que je représenterai par U, et qui n'est autre chose que la moyenne des valeurs de u sur toute l'étendue d'une section. On aura

$$U = \frac{1}{H+h}\int_0^{H+h} u\,dz = \sqrt{\frac{g}{H}}\left(h - \frac{h^2}{4H} + \frac{H^2}{6}\frac{d^2h}{dx^2}\right);$$

le dernier membre de cette formule, multiplié par $H + h$, revient sensiblement, d'après (34), à $h\omega$. On peut donc poser

$$(43)\qquad (H+h)U = h\omega,\quad \text{ou}\quad U = \frac{h\omega}{H+h}.$$

On aurait trouvé directement cette relation, en observant que le volume fluide $(H+h)U\,dt$, qui passe à travers une section durant un

instant dt, est égal à celui, $h\omega dt$, qui se trouve de plus au delà de cette section au bout du même instant, en vertu de la propagation de l'intumescence.

Enfin la partie P de la pression, qui n'est pas soumise à la loi hydrostatique, sera fournie par la formule (16) et par la condition $P = 0$ à la surface libre. Elle vaudra

$$P = \rho\left[\frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}(u^2 + w^2)\right]_1 - \rho\left[\frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}(u^2 + w^2)\right],$$

expression dans laquelle l'indice 1 au bas d'une parenthèse indique que l'expression entre parenthèses doit être prise à la surface libre ou pour $z = H + h$.

En remplaçant 1° la différence $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 - \frac{d\varphi}{dt}$, d'après (18) et (24), par

$$-\frac{(H+h)^2 - z^2}{2}\frac{d^2u_0}{dx\,dt} - g\frac{H^4 - z^4}{24}\frac{d^4h}{dx^4},$$

ce qu'on trouve en différentiant deux fois en x la première (25), égal à

$$g\left[\frac{(H+h)^2 - z^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(h + \frac{h^2}{2H} + \frac{H^2}{2}\frac{d^2h}{dx^2}\right) - \frac{H^4 - z^4}{24}\frac{d^4h}{dx^4}\right],$$

et 2° $\frac{1}{2}(u_1^2 - u^2)$, $\frac{1}{2}(w_1^2 - w^2)$, par leurs valeurs approchées

$$-g\frac{H^2 - z^2}{2H}h\frac{d^2h}{dx^2}, \quad g\frac{H^2 - z^2}{2H}\frac{dh^2}{dx^2},$$

tirées de (42), il vient

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} P = \rho g\Bigg[&\frac{(H+h)^2 - z^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(h + \frac{h^2}{2H} + \frac{H^2}{2}\frac{d^2h}{dx^2}\right) \\ &- \frac{H^4 - z^4}{24}\frac{d^4h}{dx^4} + \frac{H^2 - z^2}{2H}\left(\frac{dh^2}{dx^2} - h\frac{d^2h}{dx^2}\right)\Bigg].\end{aligned}\right.$$

La partie principale de P est proportionnelle à la courbure $\frac{d^2h}{dx^2}$ de la surface libre : résultat bien naturel, car la partie non hydrostatique de la pression est due principalement aux forces centrifuges.

On peut se demander quelle est la valeur moyenne de P dans toute l'étendue du fluide. On trouve d'abord aisément

$$\int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g} dz = \frac{H^3}{3} \frac{d^2}{dx^2}\left(h + \frac{3h^2}{2H} + \frac{2H^2}{5}\frac{d^2h}{dx^2}\right) - \frac{H^2}{3}\frac{dh^2}{dx^2},$$

et par suite, pour la valeur moyenne de $\frac{P}{\rho g}$ sur toute une section,

$$\begin{aligned}\frac{1}{H+h}\int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g} dz &= \frac{H^2}{3}\frac{d^2}{dx^2}\left(h + \frac{3h^2}{2H} + \frac{2H^2}{5}\frac{d^2h}{dx^2}\right) - \frac{H}{3}\left(\frac{dh^2}{dx^2} + h\frac{d^2h}{dx^2}\right)\\ &= \frac{H^2}{3}\frac{d^2}{dx^2}\left(h + \frac{h^2}{H} + \frac{2H^2}{5}\frac{d^2h}{dx^2}\right).\end{aligned}$$

Multipliant par dx et intégrant enfin de $x = x_0$ à $x = \infty$, il vient

$$(44\ bis)\qquad \int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g}\frac{dz}{H+h} = -\frac{H^2}{3}\left[\frac{d}{dx}\left(h + \frac{h^2}{H} + \frac{2H^2}{5}\frac{d^2h}{dx^2}\right)\right]_2.$$

Le dernier terme de cette relation, pris à la limite inférieure x_0 de l'intégrale, est nul dans le cas d'une intumescence limitée, et insensible par rapport à la longueur de l'intumescence dans le cas contraire; en le supprimant, on voit que la valeur moyenne de P est nulle.

Si, après avoir intégré par rapport à z, on n'avait pas divisé par $H + h$, on aurait trouvé

$$(44\ ter)\qquad \int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} \frac{P}{\rho g} dz = -\frac{H^2}{3}\int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx.$$

§ III. — *Mouvement du centre de gravité d'une onde. — Quantités constantes qui caractérisent chaque intumescence.*

L'intumescence étant composée d'un certain nombre d'éléments constants $d\sigma$, on peut étudier, non-seulement, comme au paragraphe précédent, le mouvement de propagation de chacun de ces éléments, mais encore celui du centre de gravité de la partie d'intumescence formée par un certain nombre d'entre eux, en appelant ainsi le point

dont les deux coordonnées à chaque instant, multipliées par le volume total de ces éléments, équivalent à la somme des produits de chacun d'eux par la coordonnée pareille, x ou $H + \frac{h}{2}$, de son milieu. Au lieu de considérer les coordonnées verticales tout entières, il reviendra au même et il sera plus commode de ne considérer que leurs parties variables, c'est-à-dire leurs excès $\frac{h}{2}$ sur la profondeur primitive H. En représentant par $q = \Sigma d\sigma$ une partie finie de l'intumescence, par ξ, $H + \eta$ les deux coordonnées de son centre de gravité, par x la coordonnée horizontale, à l'époque t, de l'élément $d\sigma$, on aura

$$(45) \qquad \xi = \frac{\Sigma x d\sigma}{q}, \quad \eta = \frac{\Sigma h d\sigma}{2q};$$

d'où, en différentiant par rapport à t,

$$(46) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\Sigma \omega d\sigma}{q}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\Sigma \left(\frac{dh}{dt}\right) d\sigma}{2q}.$$

Les deux intégrales $\Sigma \omega d\sigma$, $\Sigma \left(\frac{dh}{dt}\right) d\sigma$ peuvent être facilement obtenues au moyen des formules (34) et (40). Si l'on remplace au besoin $d\sigma$ par $-h dx$, et que l'on représente par $(\,)_0^1$ la différence des valeurs que prend, à la tête et à la queue de la partie considérée d'intumescence, la quantité mise entre parenthèses, on trouve aisément

$$\Sigma \omega d\sigma = \sqrt{gH}\left[q + \frac{3}{4H}\Sigma h d\sigma + \frac{H^2}{6}\left(\frac{dh}{dx}\right)_0^1\right],$$
$$\Sigma \left(\frac{dh}{dt}\right) d\sigma = -\sqrt{gH}\left[\frac{h^3}{4H} + \frac{H^2}{6}\left(h\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{dh^2}{dx^2}\right)\right]_0^1.$$

et les formules (46) deviennent, en tenant compte de (45),

$$(47) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \sqrt{gH}\left[1 + \dfrac{3\eta}{2H} + \dfrac{H^2}{6q}\left(\dfrac{dh}{dx}\right)_0^1\right], \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{\sqrt{gH}}{2q}\left[\dfrac{h^3}{4H} + \dfrac{H^2}{6}\left(h\dfrac{d^2h}{dx^2} - \dfrac{dh^2}{dx^2}\right)\right]_0^1. \end{cases}$$

La première de ces relations se simplifie : 1° quand les deux plans tangents menés à la surface libre aux deux extrémités de la partie considérée d'intumescence sont parallèles, ou que la différence $\left(\frac{dh}{dx}\right)_0^1$ est nulle, ce qui arrive en particulier si l'intumescence est limitée et qu'on la prenne tout entière $\left(\text{car alors } \frac{dh}{dx} = 0 \text{ à ses deux extrémités}\right)$; 2° quand le volume q est considérable. Dans ces deux cas, la première (47), élevée au carré, se réduit à

$$\frac{d\xi^2}{dt^2} = g(\mathrm{H} + 3\eta). \tag{48}$$

Par conséquent, *le carré de la vitesse de propagation du centre de gravité général d'une intumescence, ou du centre de gravité d'une partie d'intumescence comprise entre deux sections normales telles que les plans menés à ses deux extrémités, tangentiellement à la surface libre, soient parallèles, s'obtient en multipliant le nombre* $g = 9^{\mathrm{m}},809$ *par la somme de la profondeur primitive et du triple de la hauteur de ce centre de gravité au-dessus de la surface libre primitive.*

La seconde formule (47) se simplifie également beaucoup si on l'applique au centre de gravité général d'une intumescence. Son second membre est nul, en effet, quand l'intumescence est limitée, car h et ses dérivées en x sont alors nulles à ses deux extrémités, et il est insensible, à cause de la présence du dénominateur relativement considérable q, lorsque l'intumescence est très-longue. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le centre de gravité général d'une intumescence se maintient constamment à une même hauteur au-dessus de la surface libre primitive; d'où il suit que la vitesse de propagation de ce centre de gravité est constante.

L'invariabilité de η durant le mouvement revient à dire que l'intégrale $\Sigma h\,d\sigma$, étendue à toute l'intumescence, ne dépend pas du temps. Cette intégrale, que j'appellerai E, de manière à avoir

$$\mathrm{E} = \int_0^{\mathrm{Q}} h\,d\sigma = \int_{x_0}^{\infty} h^2\,dx, \tag{49}$$

exprime en effet à très-peu près, si on la multiplie par le poids spécifique ρg, l'énergie totale et constante de l'onde, c'est-à-dire le travail qu'elle produirait si le fluide revenait au repos.

Pour le démontrer, observons que ce travail total serait égal, d'après le principe des forces vives, à la demi-force vive actuelle possédée par les molécules fluides, augmentée du travail que produirait, par son poids, l'intumescence en s'affaissant, et des travaux qu'effectueraient, soit les pressions exercées sur sa surface, soit les actions moléculaires réciproques du fluide lui-même. Ces derniers travaux seraient nuls : en effet, d'une part, la pression atmosphérique constante appliquée tout autour du fluide ne peut produire aucun travail à cause de l'invariabilité du volume fluide total, non plus que les pressions exercées en outre aux divers points des parois, et qui sont normales aux déplacements des molécules fluides adjacentes; d'autre part, les actions moléculaires s'opposant seulement, à cause de l'absence supposée des frottements, aux changements de volume et non aux changements de forme, ne travaillent pas dans des mouvements qui laissent invariable le volume de chaque particule fluide [*]. Il n'y a donc qu'à évaluer la demi-force vive totale des molécules et le travail qu'effectuerait le poids du liquide si l'intumescence, dont le volume est Q, s'aplatissant en s'étendant tout le long de la surface libre primitive, de manière que l'ordonnée de son centre de gravité se réduisît de $H + \eta$ à H. Cette seconde quantité est évidemment égale à $\rho g Q \eta$, ou, d'après une des formules (45), à

$$\frac{1}{2}\rho g \int_{x_0}^{\infty} h^2\, dx.$$

Quant à la demi-force vive,

$$\frac{\rho}{2}\int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} (u^2 + w^2)\, dz,$$

elle est facile à évaluer au moyen des formules (42). Si l'on ne garde

[*] On peut voir, à ce sujet, la dernière Note de ma *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers*, t. XX).

que les termes de l'ordre de grandeur le moins élevé, et ceux de l'ordre immédiatement supérieur, on trouve

$$\int_0^{H+h} (u^2 + w^2)\,dz = g\left(h^2 + \frac{h^3}{2H} + \frac{H^2}{3}\,\frac{d.h\frac{dh}{dx}}{dx}\right);$$

multiplions par $\frac{\rho}{2}dx$, et intégrons de $x = x_0$ à $x = \infty$, en observant que, dans le résultat, le terme $\frac{\rho g H^2}{6} h \frac{dh}{dx}$, nul à la limite supérieure de l'intégrale, est également nul à la limite inférieure quand l'intumescence est limitée, et insensible dans le cas contraire en comparaison de deux autres termes qui sont alors considérables à cause de la longueur de l'onde; il viendra

$$\frac{\rho}{2}\int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{H+h} (u^2 + w^2)\,dz = \frac{\rho g}{2}\int_{x_0}^{\infty} h^2\,dx + \frac{\rho g}{4H}\int_{x_0}^{\infty} h^3\,dx.$$

L'énergie totale de l'onde, que je représenterai par $\mathcal{E}$, est par conséquent

$$\mathcal{E} = \rho g \int_{x_0}^{\infty} h^2\,dx + \frac{\rho g}{4H}\int_{x_0}^{\infty} h^3\,dx. \tag{50}$$

L'expression de $\mathcal{E}$ se compose donc de deux termes, dont le premier, seul sensible, est égal à $\rho g E$ et à fort peu près constant, tandis que le second peut être évalué, à cause de sa petitesse relative dans l'équation (50), en y supposant, pendant un temps fini, h simplement fonction de $x - t\sqrt{gH}$ et x_0 égal à une constante augmentée de $t\sqrt{gH}$, ce qui donne à ce second terme une valeur très-lentement variable.

On peut se demander quelle est la quantité totale de mouvement possédée par l'onde suivant l'axe du canal. Cette quantité, évidemment égale à $\rho\int_{x_0}^{\infty}(H+h)U\,dx$, pourra s'écrire, en tenant compte de (43), $\rho\int_{x_0}^{\infty} h\omega\,dx$ ou $\rho\,\Sigma\,\omega\,d\sigma$, c'est-à-dire qu'elle est égale, d'après la première (46), au produit constant de la masse ρQ de l'intumescence par la vitesse de propagation de son centre de gravité.

Chaque intumescence est caractérisée, non-seulement par son vo-

lume total et par son énergie, c'est-à-dire par les deux intégrales invariables $Q = \Sigma d\sigma$ et $E = \Sigma h d\sigma$, mais encore par son *moment d'instabilité*. Cette quantité, que je représenterai par M, n'est autre que l'intégrale

$$(51) \qquad M = \int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^3}{H^3} \right) dx;$$

on verra, au § V, ce qu'elle représente et la raison du nom que je lui donne. Je me contenterai ici de démontrer qu'elle conserve la même valeur d'un instant à l'autre.

On a évidemment, d'après les règles de la différentiation des intégrales, et en effectuant ensuite une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx &= -\left(\frac{dh^2}{dx^2}\omega\right)_{x_0} + 2\int_{x_0}^{\infty} \frac{dh}{dx}\frac{d\frac{dh}{dt}}{dx} dx \\ &= -\left(\frac{dh^2}{dx^2}\omega + 2\frac{dh}{dx}\frac{dh}{dt}\right)_{x_0} - 2\int_{x_0}^{\infty} \frac{dh}{dt}\frac{d^2h}{dx^2} dx. \end{aligned}$$

En observant que le terme entre parenthèses pris à la limite inférieure x_0 est nul dans le cas d'une intumescence limitée et insensible en comparaison du dernier dans celui d'une intumescence très-longue, cette formule s'écrit simplement

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx = -2\int_{x_0}^{\infty} \frac{dh}{dt}\frac{d^2h}{dx^2} dx.$$

On peut remplacer dans celle-ci $\frac{dh}{dt}$ par sa valeur tirée de (29), puis $h\omega$ par son expression que donne (34), et effectuer l'intégration exacte de deux termes qui ne fournissent également aux deux limites que des résultats nuls ou insensibles; il vient ainsi

$$(52) \qquad \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\infty} \frac{dh^2}{dx^2} dx = 3\sqrt{\frac{g}{H}}\int_{x_0}^{\infty} h\frac{dh}{dx}\frac{d^2h}{dx^2} dx.$$

On trouve de même

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\infty} h^3 dx = -(h^3\omega)_{x_0} + 3\int_{x_0}^{\infty} h^2\frac{dh}{dt} dx = -3\int_{x_0}^{\infty} h^2\frac{d.h\omega}{dx} dx,$$

et, en intégrant par parties,

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\infty} h^3\,dx = 6\int_{x_0}^{\infty} h^2\,\omega\,\frac{dh}{dx}\,dx;$$

enfin, si l'on remplace ω par sa valeur (34), et qu'on néglige deux termes exactement intégrables, donnant aux deux limites des résultats nuls ou négligeables, on trouve

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\infty} h^3\,dx = \mathrm{H}^3\sqrt{\frac{g}{\mathrm{H}}}\int_{x_0}^{\infty} h\,\frac{dh}{dx}\,\frac{d^2h}{dx^2}\,dx.$$

Cette relation, multipliée par $\frac{3}{\mathrm{H}^3}$ et retranchée de (52), donne bien

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\infty}\left(\frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^3}{\mathrm{H}^3}\right)dx = 0.$$

§ IV. — *Onde solitaire*

L'onde solitaire de Scott Russell étant caractérisée par sa grande longévité, c'est-à-dire par la propriété qu'ont toutes ses parties de se propager également vite, de manière à ne pas subir de déformation appréciable, on doit trouver théoriquement les lois qui la concernent en supposant ω constante dans la formule (34).

Dans cette hypothèse, si nous appelons h_1 une quantité constante, telle que

$$(53)\qquad \frac{\omega}{\sqrt{g\mathrm{H}}} = 1 + \frac{h_1}{2\mathrm{H}}, \quad \text{ou} \quad \omega^2 = g(\mathrm{H} + h_1),$$

cette formule devient

$$(54)\qquad \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{3h}{2\mathrm{H}^3}(2h_1 - 3h).$$

Celle-ci, multipliée par $2\frac{dh}{dx}dx$ et intégrée de manière que $h = 0$ et

$\frac{dh}{dx} = 0$ pour $x = \infty$, donne

$$(55) \qquad \frac{dh^2}{dx^2} = \frac{3}{H^3} h^2 (h_1 - h).$$

Cette relation ayant son premier membre essentiellement positif, il faut que h_1 soit partout plus grand que h, et par suite (comme $h = 0$ pour x infini) que h_1 soit positif.

On vérifie aisément que (55) revient à

$$(56) \qquad \left(\frac{d\frac{h_1}{h}}{dx}\right)^2 = \frac{3h_1}{H^3}\frac{h_1}{h}\left(\frac{h_1}{h} - 1\right),$$

équation qui, différentiée par rapport à x, donne immédiatement

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3h_1}{H^3}\left(\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2}\right),$$

et par suite, en intégrant et désignant par c, c' deux constantes arbitraires,

$$\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2} = c'\left[e^{\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)} + e^{-\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)}\right].$$

Pour que cette intégrale vérifie l'équation du premier ordre (56), il faut faire $c'^2 = \frac{1}{16}$ ou $c' = \pm\frac{1}{4}$: on doit donc poser

$$(57) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{h_1}{h} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\left[e^{\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)} + e^{-\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 \pm \cosh\text{yp}\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)\right] [*]. \end{aligned}\right.$$

---

[*] Cette équation, résolue par rapport à l'une des deux exponentielles, inverses l'une de l'autre, qu'elle contient, donne, en supposant $x - c > 0$,

$$(57\ bis) \qquad e^{\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-c)} = \pm 2\left(\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{4\left(\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - 1},$$

formule qui permet de calculer x, pour chaque valeur de h, au moyen des simples tables ordinaires de logarithmes.

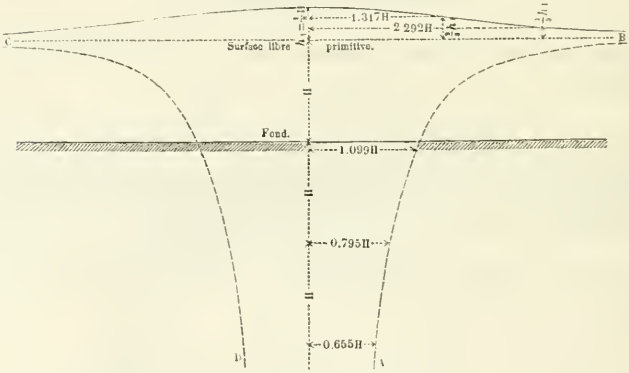
C'est ainsi que j'ai obtenu divers points de la courbe suivante, dont la branche

Le cosinus hyperbolique qui entre dans le second membre de (57) est une fonction paire de $x - c$; il a sa valeur minimum pour $x - c = 0$, et il grandit sans cesse jusqu'à l'infini lorsque $x - c$ varie

---

supérieure représente le profil d'une onde solitaire dans l'hypothèse $h_1 = \frac{1}{5}$ H, et dont les deux branches inférieures ponctuées correspondent à des valeurs négatives de h. Les profils des ondes solitaires pour lesquelles h_1 différerait de $\frac{1}{5}$ H pourraient s'en déduire en faisant varier les ordonnées verticales h abaissées de la courbe sur son asymptote proportionnellement à h_1, et les distances horizontales qui séparent ces ordonnées les unes des autres en raison inverse de la racine carrée de h_1 : la formule (57 *bis*) montre bien, en effet, que, pour des valeurs égales du rapport $\frac{h_1}{h}$ dans différentes ondes, le produit $\frac{x-c}{\mathrm{H}}\sqrt{\frac{h_1}{\mathrm{H}}}$ est constant.

Profil d'une onde solitaire.



L'équation (57) pourrait aussi s'écrire

$$\frac{h_1}{h} = \text{soit}\left[\frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-c)} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-c)}}{2}\right]^2, \quad \text{soit} - \left[\frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-c)} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-c)}}{2}\right]^2,$$

c'est-à-dire

$$(57\ ter) \qquad \frac{h_1}{h} = \text{soit } \cos\text{hyp}^2\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-c), \quad \text{soit } -\sin\text{hyp}^2\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-c).$$

de o à $\pm\infty$. Par suite, le rapport $\frac{h_1}{h}$, égal à un ou à zéro pour $x-c=0$, suivant que la constante c' est positive ou négative, croît dans le premier cas jusqu'à l'infini, et décroît dans le second jusqu'à $-\infty$, quand $x-c$ va de o à $\pm\infty$; dans le premier cas, h décroît de h_1 à zéro; dans le second, h croît de $-\infty$ à zéro. Il est évident que ce second cas ne répond à rien de réel, car h ne peut jamais être inférieur à $-\mathrm{H}$. On est donc obligé de supposer c' positif. Si l'on considère d'ailleurs que l'onde avance dans le sens des x positifs avec la vitesse de propagation ω, ou que l'abscisse c de son sommet est égale à ωt, pourvu que le temps soit compté à partir du moment où ce sommet est passé à l'origine, l'équation (57) deviendra celle de la surface libre

$$(58)\qquad h=\frac{4h_1}{2+e^{\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-\omega t)}+e^{-\sqrt{\frac{3h_1}{\mathrm{H}^3}}(x-\omega t)}}.$$

Par conséquent, *la surface libre de l'onde solitaire, symétrique par rapport à la section normale $x=\omega t$, menée par son sommet, s'abaisse avec continuité de part et d'autre de cette section, de manière à se raccorder asymptotiquement, pour $x-\omega t=\pm\infty$, avec la surface primitive.* D'après la formule (54), *elle est convexe aux points dont l'élévation est supérieure aux deux tiers de sa hauteur totale et concave aux points plus bas.*

La constante h_1 n'est autre, comme on vient de voir, que la valeur maximum de h : cela résulte d'ailleurs directement de l'équation (55), qui ne donne à la dérivée de h en x une valeur nulle que pour $h=0$ et $h=h_1$. La formule (53) exprime, par suite, cette loi expérimentale et bien connue de Scott Russell : *La vitesse de propagation d'une onde solitaire est égale à la racine carrée du produit du nombre g par la distance qu'il y a du sommet de l'onde au fond du canal.*

Cette loi, comparée à celle qu'exprime la formule (48), montre que *le centre de gravité d'une onde solitaire se trouve au tiers de sa hauteur, comme dans le triangle isoscèle.* Il est aisé, du reste, de trouver directement ce résultat, en même temps qu'une relation intéressante entre la partie variable h d'une ordonnée quelconque $\mathrm{H}+h$ et l'aire que comprennent, du côté des x positifs, cette ordonnée, une

coupe longitudinale de la surface libre (58) et la surface libre primitive.

Un élément $d\sigma$ de cette aire égalant $h\,dx$ en valeur absolue, la formule (55) peut s'écrire

$$(59)\qquad \frac{dh^2}{d\sigma^2} = \frac{3}{H^3}(h_1 - h).$$

Celle-ci, différentiée, donne

$$(60)\qquad \frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma} = -\frac{3}{2H^3} \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{2H^3}{3}\frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma} = 0:$$

on aurait pu déduire directement cette équation de (40 *bis*); il aurait suffi de remarquer que, l'onde solitaire ne se déformant pas, on y a $\left(\frac{dh}{dt}\right) = 0$, et par suite

$$h^3\left(1 + \frac{2H^3}{3}\frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma}\right) = \text{const.};$$

or cette constante égale zéro, car l'expression dont elle représente la valeur s'annule pour $x = \infty$, à cause de la présence du facteur h^3.

L'équation (60), multipliée successivement deux fois par $d\sigma$, et intégrée chaque fois, en observant à la fin que h doit s'annuler pour $\sigma = 0$ et pour $\sigma = Q$, donne

$$(61)\qquad h = \frac{3}{4H^3}\sigma(Q - \sigma)\ [*].$$

---

[*] Cette valeur de h, portée dans (59), la vérifie à la condition nécessaire et suffisante qu'il y ait entre h_1 et Q la relation (63) ci-après. Celle-ci étant admise, l'équation (61) est donc équivalente à (59), et par suite à (55) ou à (57). Les trois branches AB, BC, CD (*voir* la figure précédente) de la courbe que représente l'équation (57) seront données par la relation (61) en y faisant varier respectivement σ de $-\infty$ à 0, de 0 à Q, de Q à ∞ ; car, si un point parcourt toute cette courbe en allant successivement de A en B, de B en C, de C en D, le σ de ce point, ayant par définition sa différentielle égale à $-h\,dx$, croîtra sans cesse comme on le voit sur la figure, et il sera d'abord négatif puisqu'il ne s'annule qu'en B.

D'où le théorème suivant : *La coupe longitudinale de la surface libre d'une onde solitaire est une courbe telle que le produit d'une perpendiculaire quelconque, abaissée de cette courbe sur son asymptote, par le cube de la profondeur primitive de l'eau dans le canal, est égal aux trois quarts du produit des deux parties en lesquelles cette perpendiculaire divise la surface comprise entre la courbe et son asymptote.*

Cette propriété n'appartient qu'à l'onde solitaire [*]. Car, si une courbe plane est telle que le produit de son ordonnée h par le cube d'une ligne constante H soit égal aux trois quarts du produit des deux parties $\int_{x_0}^{x} h\,dx$, $\int_{x}^{x_1} h\,dx$, en lesquelles cette ordonnée divise l'aire Q comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, on aura

$$h = \frac{3}{4H^3}\int_{x_0}^{x} h\,dx \int_{x}^{x_1} h\,dx, \tag{62}$$

ou, en différentiant et élevant au carré,

$$\begin{aligned}\frac{dh^2}{dx^2} &= \left(\frac{3}{4H^3}\right)^2 h^2\left(\int_{x}^{x_1} h\,dx - \int_{x_0}^{x} h\,dx\right)^2\\ &= \left(\frac{3h}{4H^3}\right)^2\left[\left(\int_{x}^{x_1} h\,dx + \int_{x_0}^{x} h\,dx\right)^2 - 4\int_{x_0}^{x} h\,dx\int_{x}^{x_1} h\,dx\right]\\ &= \left(\frac{3h}{4H^3}\right)^2\left(Q^2 - \frac{16H^3}{3}h\right).\end{aligned}$$

Le produit des deux parties de l'aire Q étant d'ailleurs maximum quand ces deux parties sont égales et valent $\frac{Q}{2}$, la formule (62) donne,

---

[*] Entendue algébriquement, c'est-à-dire en tant qu'exprimée par la relation (61), cette propriété appartient, ainsi qu'on l'a vu dans la note précédente, à toute la courbe ayant l'équation (57), équation qui revient, si l'on appelle y et x les deux coordonnées h et x, et si l'on pose $\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}} = a$, $c = 0$, à $\left(\frac{2h_1}{y} - 1\right)^2 = \cosh\text{yp}^2 ax$: cette courbe comprend, comme le montre la figure d'une Note précédente, outre une branche à deux inflexions située du côté des y positifs, et qui est le profil d'une onde solitaire, deux branches sans inflexion, ayant chacune pour asymptotes l'axe des x et l'axe des y négatifs

pour valeur maximum de h,

$$h_1 = \frac{3Q^2}{16H^3}, \tag{63}$$

et l'équation précédente devient précisément, en éliminant Q^2, l'équation différentielle (55) de l'onde solitaire.

La formule (63), qu'on peut également déduire de (61) en faisant $\sigma = \frac{Q}{2}$, exprime que *la hauteur de l'onde solitaire est les trois seizièmes du carré du volume total de l'onde par unité de largeur du canal, divisés par le cube de la profondeur primitive.*

La hauteur η du centre de gravité de l'onde au-dessus de la surface libre primitive égale, d'après la seconde des relations (45), le quotient de $\Sigma h d\sigma$ par $2Q$. En substituant à h sa valeur (61), on trouve

$$\eta = \frac{1}{2Q}\int_0^Q h\,d\sigma = \frac{Q^2}{16H^3}, \tag{64}$$

c'est-à-dire le tiers de la valeur (63) de h_1, ce qu'il fallait démontrer.

Il en résulte, pour l'intégrale E ou $2Q\eta$, dont le produit par le poids de l'unité de volume représente l'énergie de l'onde,

$$E = \frac{Q^2}{8H}; \tag{64 bis}$$

par suite,

$$Q = 2H\sqrt[3]{E},$$

et il vient, d'après la formule (63),

$$h_1 = \frac{3\sqrt[3]{E^2}}{4H}, \quad \frac{Q}{h_1} = \frac{8H^2}{3\sqrt[3]{E}}. \tag{64 ter}$$

Lorsqu'une onde se propage le long d'un canal dont la profondeur H est lentement décroissante d'un point à l'autre, comme cela avait lieu dans les expériences de M. Bazin, le fond du canal doit réfléchir sans cesse une petite partie du mouvement, de manière que le volume et

l'énergie de l'intumescence se partagent entre l'onde directe et cette onde réfléchie. Celle-ci étant de longueur croissante et d'une hauteur évidemment très-petite, son volume deviendra fini sans que son énergie, qui est à la fois proportionnelle à ce volume et à sa hauteur, cesse de rester très-petite. L'onde directe conservera donc, à fort peu près, toute l'énergie de l'intumescence, et, comme elle gardera sensiblement la forme d'une onde solitaire, ainsi que nous le démontrerons au paragraphe suivant, sa hauteur h_1 et le rapport de son volume Q à cette hauteur s'obtiendront à un instant quelconque au moyen des deux formules (64 *ter*), où E sera invariable : on voit que l'onde deviendra plus élevée, plus courte, et par conséquent moins stable, jusqu'à ce qu'enfin elle manque de base et déferle. Le contraire arriverait si la profondeur allait en augmentant. Alors l'onde réfléchie serait négative, mais n'aurait toujours qu'une énergie négligeable; et la hauteur décroissante h_1, ainsi que le volume croissant Q, de l'onde directe, seraient encore donnés en chaque point par les formules (64 *ter*).

L'onde solitaire jouit enfin de la propriété de rendre minimum deux intégrales dans des conditions données. Nous étudierons au paragraphe suivant la plus importante. Celle dont nous nous occuperons ici est l'intégrale

$$(65)\qquad N = \int_{x_0}^{\infty}\left(\frac{1}{h}\frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^2}{H^3}\right)dx = \int_0^Q\left(\frac{dh^2}{d\sigma^2} - \frac{3h}{H^2}\right)d\sigma.$$

L'onde solitaire est, de toutes les intumescences qui ont un même volume total Q, celle qui donne à cette intégrale sa plus petite valeur, et même la seule qui la rende maximum ou minimum.

Pour le démontrer, supposons que, h étant supposé exprimé en fonction de σ d'un bout à l'autre de l'intumescence, on donne à h, pour chacune de ces valeurs de σ, un petit accroissement Δh variable avec continuité d'un élément de volume $d\sigma$ de l'intumescence aux éléments voisins. En appelant ΔN l'accroissement que recevra N, et en observant que

$$\Delta\frac{dh^2}{d\sigma^2} = 2\frac{dh}{d\sigma}\frac{d\Delta h}{d\sigma} + \left(\frac{d\Delta h}{d\sigma}\right)^2,$$

il viendra

$$\Delta N = \int_0^Q \left[-\frac{3\Delta h}{H^3} + 2\frac{dh}{d\sigma}\frac{d\Delta h}{d\sigma} \right] d\sigma + \int_0^Q \left(\frac{d\Delta h}{d\sigma}\right)^2 d\sigma,$$

ou bien, en intégrant un terme par parties,

$$(66) \quad \Delta N = \left(2\frac{dh}{d\sigma}\Delta h\right)_0^Q - \frac{3}{H^3}\int_0^Q \left(1 + \frac{2H^3}{3}\frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma}\right)(\Delta h)\,d\sigma + \int_0^Q \left(\frac{d\Delta h}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Le premier terme du second membre est nul à la limite inférieure de l'intégration, limite qui correspond à $x = \infty$, parce qu'on y a $\Delta h = 0$; à la limite supérieure, ou pour $x = x_0$, il est nul pour la même raison dans le cas d'une intumescence limitée, et insensible en comparaison du dernier terme de (66) dans celui d'une intumescence très-longue. On peut donc écrire simplement

$$(66\ bis) \quad \Delta N = -\frac{3}{H^3}\int_0^Q \left(1 + \frac{2H^3}{3}\frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma}\right)(\Delta h)\,d\sigma + \int_0^Q \left(\frac{d\Delta h}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Si l'on n'a pas, pour toutes les valeurs de σ,

$$1 + \frac{2H^3}{3}\frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma} = 0,$$

ce qui est l'équation différentielle (60) de l'onde solitaire, on pourra donner au petit accroissement Δh, pour chaque valeur de σ, des valeurs telles que tous les éléments de la première intégrale du second membre de (66 *bis*) aient le même signe et soient incomparablement plus grands que ceux de la seconde intégrale, puis donner à Δh les valeurs précisément contraires : l'accroissement ΔN serait ainsi successivement positif et négatif, et N ne serait ni maximum ni minimum. Donc l'intégrale N ne peut être maximum ou minimum qu'autant que l'équation différentielle (60) sera vérifiée, c'est-à-dire dans le cas seulement de l'onde solitaire. Mais, si cette équation est vérifiée, ΔN, alors égal au dernier terme de (66 *bis*), est essentiellement positif, et l'intégrale est bien minimum.

§ V. — *Moment d'instabilité d'une intumescence quelconque. — Stabilité de l'onde solitaire et cause de sa formation fréquente.*

L'onde solitaire est encore, parmi toutes les intumescences d'égale énergie, celle pour laquelle le moment d'instabilité

$$M = \int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{dh^2}{dx^2} - \frac{3h^3}{H^3} \right) dx$$

est le plus petit possible, et même la seule qui rende ce moment maximum ou minimum.

Pour démontrer cette propriété, je poserai

$$(67) \qquad \varepsilon = \int_x^{\infty} h^2 dx,$$

et je prendrai pour variable indépendante, au lieu de x, la quantité ε, essentiellement positive, et croissante de zéro à E lorsque x décroît de ∞ à x_0. La relation (67) différentiée donnant

$$(68) \qquad d\varepsilon = -h^2 dx, \quad \text{ou} \quad dx = -\frac{d\varepsilon}{h^2},$$

l'intégrale M deviendra

$$(69) \qquad M = \int_0^{E} \left(h^2 \frac{dh^2}{d\varepsilon^2} - \frac{3h}{H^3} \right) d\varepsilon = \int_0^{E} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{d.h^2}{d\varepsilon} \right)^2 - \frac{3h}{H^3} \right] d\varepsilon,$$

et la limite supérieure E de l'intégrale sera la même pour toutes les intumescences que nous aurons à considérer, car cette limite n'est autre chose que le quotient par ρg de l'énergie $\mathcal{E}$, qui est supposée la même pour toutes.

Concevons que, pour chaque valeur de ε, h reçoive un accroissement Δh [*], qui sera, comme h, une fonction continue et finie quel-

[*] Cette méthode, dont je me suis déjà servi à la fin du paragraphe précédent, pour traiter le problème du maximum ou du minimum relatif d'une intégrale, et qui consiste à prendre pour variable indépendante l'intégrale, σ ou ε, dont la valeur totale doit rester constante, est analogue à celle qu'on emploie dans les questions d'isopérimètres, lorsqu'on y prend pour variable indépendante l'arc dont la valeur totale est une quantité invariable et donnée.

conque de ε. On aura évidemment

$$\Delta\left(\frac{d.h^2}{d\varepsilon}\right)^2 = 2\frac{d.h^2}{d\varepsilon}\frac{d\Delta.h^2}{d\varepsilon} + \left(\frac{d\Delta.h^2}{d\varepsilon}\right)^2 = 4h\frac{dh}{d\varepsilon}\frac{d\Delta.h^2}{d\varepsilon} + \left(\frac{d\Delta.h^2}{d\varepsilon}\right)^2,$$

et par suite

$$\Delta M = \int_0^E \left(-\frac{3\Delta h}{H^3} + h\frac{dh}{d\varepsilon}\frac{d\Delta.h^2}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon + \int_0^E \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta.h^2}{d\varepsilon}\right)^2 d\varepsilon;$$

en intégrant un terme par parties et observant ensuite que

$$\Delta.h^2 = 2h\Delta h + (\Delta h)^2,$$

cette formule devient

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta M = \left(h\frac{dh}{d\varepsilon}\Delta.h^2\right)_0^E - \frac{3}{H^3}\int_0^E \left(1 + \frac{2H^3}{3}h\frac{d.h\frac{dh}{d\varepsilon}}{d\varepsilon}\right)\Delta h\,d\varepsilon \\ + \int_0^E \left[-\frac{d.h\frac{dh}{d\varepsilon}}{d\varepsilon}(\Delta h)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta.h^2}{d\varepsilon}\right)^2\right]d\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme du second membre est la différence des deux valeurs de l'expression $h\frac{dh}{d\varepsilon}\Delta.h^2$, ou $\frac{dh}{d\sigma}\Delta.h^2$, prise successivement aux deux limites $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = E$, c'est-à-dire aux points $x = \infty$ et $x = x_0$: elle s'annule à la limite inférieure, ou pour $x = \infty$, car on y a toujours $h^2 = 0$, et par suite $\Delta.h^2 = 0$; à la limite supérieure, ou pour $x = x_0$, elle s'annule pour la même raison dans le cas d'une intumescence limitée, et elle est insensible en comparaison du dernier terme de (70) dans le cas d'une intumescence très-longue. Le premier terme du second membre de (70) peut donc toujours être supprimé.

On verra, en raisonnant comme on l'a fait après la formule (66 *bis*), que le signe de ΔM changera suivant les valeurs données à Δh, si l'on n'a pas, quel que soit ε,

$$(71)\qquad 1 + \frac{2H^3}{3}h\frac{d.h\frac{dh}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} = 0,$$

ou bien, en observant que $d\varepsilon = -h^2 dx = h d\sigma$,

$$1 + \frac{2H^3}{3} \frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma} = 0.$$

C'est l'équation différentielle (60) de l'onde solitaire : ainsi l'intégrale M ne peut être maximum ou minimum que pour l'onde solitaire. Or elle est dans ce cas minimum, car l'expression de ΔM, alors réduite à

$$\Delta M = \int_0^E \left[-\frac{d\, h\frac{dh}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} (\Delta h)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta . h^2}{d\varepsilon}\right)^2 \right] d\varepsilon,$$

ou, d'après (71), à

$$(72) \qquad \Delta M = \int_0^E \left[\frac{3}{2H^3} \frac{(\Delta h)^2}{h} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta . h^2}{d\varepsilon}\right)^2 \right] d\varepsilon,$$

est essentiellement positive, h étant partout > 0 dans une onde solitaire [*].

De toutes les ondes de même énergie, celle pour laquelle l'intégrale M a la plus petite valeur possible est donc l'onde solitaire, c'est-à-dire la seule qui ne se déforme pas en se propageant. L'excès de la valeur effective et constante de l'intégrale M, pour une intumescence donnée, sur sa valeur minimum, peut être regardée par suite comme

---

[*] Cette valeur minimum de $M = \int_0^Q \left(h\frac{dh^2}{d\sigma^2} - \frac{3h^2}{H^3} \right) d\sigma$, facile à obtenir au moyen de l'expression (61) de h, est

$$-\frac{1}{10}\left(\frac{3}{4H^3}\right)^3 Q^2;$$

or E ou $2Q\pi$ vaut, d'après (64 *bis*), $\left(\frac{Q}{2H}\right)^3$, d'où il suit, en éliminant Q, que la valeur minimum du moment d'instabilité est

$$(72\ bis) \qquad M = -\frac{27}{20}\frac{E^{\frac{5}{3}}}{H^4}.$$

une mesure, soit de la différence de forme qu'il y a entre l'intumescence considérée et l'onde solitaire de même énergie, soit de la rapidité avec laquelle l'onde se déforme en se propageant et de l'amplitude des déformations qu'elle éprouve. C'est pourquoi j'ai appelé cette intégrale le *moment d'instabilité* de l'onde.

Si le moment d'instabilité d'une onde dépasse peu sa valeur minimum, la forme de l'intumescence oscillera autour de celle d'une onde solitaire de même énergie, sans en différer jamais beaucoup : elle ne pourrait en effet s'en écarter notablement sans que le moment d'instabilité grandît, ce qui est impossible, puisque ce moment ne varie pas d'un instant à l'autre; ou, plutôt, une onde solitaire se formera bientôt; car les frottements, dont nous avons fait abstraction, finissent par éteindre les oscillations de la forme effective de l'intumescence autour de sa forme limite, tout comme ils finissent toujours par ramener à leurs positions d'équilibre stable des points matériels qu'on n'en a pas trop écartés. Et l'on conçoit même, vu l'absence d'une autre forme stable autour de laquelle une onde puisse osciller, que toute intumescence susceptible, par son volume positif et modéré, de former une onde solitaire assez peu haute pour ne pas déferler prenne au bout d'un certain temps cette forme. Ainsi s'explique la facilité avec laquelle on produit des ondes solitaires.

§ VI. — *Examen des cas où l'intumescence n'est pas une onde solitaire.*

Mais lorsque l'intumescence est ou positive, et d'un volume considérable, ou négative, il n'existe plus de forme stable qu'elle puisse prendre. La formule (34), qui fournit à chaque instant la vitesse de propagation de ses diverses parties, permet de prévoir la plupart des circonstances qui se présentent alors.

Examinons d'abord le cas où l'intumescence est positive et sans fin, comme il arrive quand on verse continuellement du liquide à l'entrée d'un canal horizontal de longueur indéfinie, ou encore quand l'entrée d'un tel canal est constituée par un piston que l'on pousse en avant

d'une manière continue. Si l'on admet, pour simplifier, que l'effusion du fluide ou le mouvement du piston soient uniformes, il est évident qu'on verra une lame liquide, dont la hauteur sera bientôt sensiblement constante, s'avancer progressivement sur l'eau tranquille du canal, et que la vitesse de propagation de cette lame, multipliée par sa hauteur, sera l'expression du volume liquide projeté du dehors ou refoulé par le piston dans l'unité de temps et par unité de largeur du canal. La courbure de cette même lame étant très-petite, abstraction faite des phénomènes exceptionnels que peut présenter sa tête, la dérivée seconde de h en x sera négligeable, et la formule (34) donnera la loi expérimentale trouvée par M. Bazin

$$\omega^2 = g\left(\mathrm{H} + \tfrac{3}{2}h\right). \tag{73}$$

Cette loi résulterait encore de la relation (48), car la hauteur η du centre de gravité de la lame au-dessus de la surface libre primitive est évidemment égale à $\frac{1}{2}h$.

Le théorème relatif aux quantités de mouvement permet d'établir que la formule (73) est indépendante des frottements *intérieurs* du fluide, pourvu que l'onde conserve sensiblement la même forme pendant un certain temps. Considérons en effet le volume liquide compris à l'époque t entre deux sections normales, l'une de hauteur H et menée en avant de l'onde, l'autre de hauteur $\mathrm{H} + h$, menée en un point du canal où la courbure de la surface soit insensible et où, les forces centrifuges étant par suite négligeables, la pression soit à fort peu près soumise à la loi hydrostatique : les actions exercées sur ce volume suivant l'axe du canal se réduisent, si les frottements du fond et des parois sont négligeables, à la pression $\frac{1}{2}\rho g(\mathrm{H} + h)^2$ exercée sur la seconde des deux sections considérées, et à celle de sens contraire $-\frac{1}{2}\rho g\,\mathrm{H}^2$ exercée sur la première; le produit de leur somme par un élément de temps dt doit égaler l'augmentation de la quantité de mouvement suivant les x de ce même volume. Cette augmentation est égale à l'accroissement, pendant l'instant dt, de la quantité de mouvement possédée, suivant les x, par la matière qui se trouve au delà de la seconde section, moins celle que possède le liquide, étranger au volume considéré, qui a traversé cette section pendant l'instant dt. Si U désigne la vitesse

commune des molécules qui traversent la section, la première de ces quantités est $\rho U(H+h)\omega dt$, à cause de la progression ωdt de l'onde, dont la forme n'est pas supposée changer notablement, et la seconde est évidemment $\rho U(H+h)U dt$. On a donc l'égalité

$$\tfrac{1}{2}\rho g(H+h)^2 - \tfrac{1}{2}\rho g H^2 = \rho U(H+h)\omega - \rho U(H+h)U,$$

ou bien

$$(74) \qquad gh\left(H+\frac{h}{2}\right) = (\omega - U)U(H+h).$$

D'autre part, le volume fluide $(H+h)U dt$ qui traverse une section dans le temps dt est évidemment le même que celui $h\omega dt$ qui, au bout de ce même temps, se trouve de plus au delà de cette section en vertu du mouvement de progression de l'onde. On a donc

$$(75) \qquad (H+h)U = h\omega.$$

Si l'on tire U de (75) pour en porter la valeur dans (74), il vient

$$(76) \qquad \omega^2 = g\left(H + \tfrac{3}{2}h + \frac{h^2}{2H}\right) \text{ [*]},$$

[*] Cette relation se trouve déjà établie, et de la même manière, dans un article de M. de Saint-Venant inséré aux *Comptes rendus* (t. LXXI, 18 juillet 1870). Elle y est même étendue au cas où le canal, toujours prismatique, aurait pour section toute autre figure qu'un rectangle à base horizontale. En appelant alors H la profondeur moyenne primitive, c'est-à-dire le quotient de la section normale primitive par la largeur L à fleur d'eau, et supposant cette largeur sensiblement constante d'un bout à l'autre de l'intumescence, de manière que la seconde des sections considérées ci-dessus vaille $HL + hL$, la pression appliquée à la partie inférieure HL de cette section, en outre de celle qui s'y trouverait exercée si l'on avait $h = 0$, a pour expression $(\rho g h)HL$, et la pression appliquée à la partie supérieure hL vaut $\frac{1}{2}\rho g h^2 L$. Si l'on égale le produit par dt de cet excédant total de pression à la quantité de mouvement gagnée pendant l'instant dt par le liquide qui, au commencement de cet instant, se trouve au delà de la même section, quantité dont l'expression est encore $\rho U(H+h)L(\omega - U)dt$, il vient la relation (74). Celle-ci, combinée avec la condition d'incompressibilité, qui est toujours (75), donne donc, pour ω^2, la même formule (76) que dans le cas d'un canal rectangulaire.

formule qui se réduit à (73) quand le rapport de h à H est très-petit.

Voyons actuellement ce qui doit se passer à la tête de l'intumescence. Il est impossible que la hauteur y reste simplement égale à celle de la lame qui suit; car, le sommet de la partie antérieure de l'onde étant forcément convexe, la courbure $\frac{dh}{dx^2}$ y est négative et le dernier terme de la formule (34) y rend, à hauteur pareille, la vitesse de propagation moindre que celle de la lame qui suit. Celle-ci, se propageant plus vite, inondera donc la partie antérieure de l'onde, de manière à l'exhausser jusqu'à ce que son excès d'élévation compense dans la formule (34) l'influence du dernier terme négatif. Ainsi se formera ce que M. Bazin a appelé *l'onde initiale*. Sa hauteur devra osciller, comme il l'a reconnu, un peu au-dessus et au-dessous de $\frac{3}{2}$ de celle de la lame qui suit : en effet, son volume ne cessera d'augmenter que lorsque la vitesse de propagation de son centre de gravité sera sensiblement égale à celle de la lame même; or la forme de cette onde montre que son centre de gravité est environ au tiers de sa hauteur, et d'autre part, la formule (48), qui lui est applicable, donne, pour le carré de sa vitesse de propagation, $g(H + 3\eta)$, résultat dont l'égalité au second membre de (73) exige que $3\eta = \frac{3}{2}h$. Mais ce n'est pas tout : l'onde initiale ne pourra se raccorder à la lame située à son arrière que par une courbe ayant une partie concave, pour laquelle le dernier terme de (34) sera positif; tant que cette partie se trouvera aussi élevée que la surface de la lame, le dernier terme de la formule (34) rendra sa vitesse de propagation plus grande que la vitesse de propagation de celle-ci, et il se creusera, par suite, un vide entre l'onde initiale et la lame liquide. Mais la concavité ainsi formée restera tout entière située au-dessus de la surface libre primitive; car, si elle s'abaissait à peine au-dessous, h y serait négatif, la formule (34) y donnerait ω notablement inférieur à la vitesse de propagation des parties suivantes de l'intumescence, et celles-ci, affluant, en exhausseraient sur-le-champ le niveau. La concavité qui suivra l'onde initiale ne pourra de même se raccorder à la lame située à son arrière qu'au moyen d'une partie convexe qui deviendra de même, à cause de sa vitesse de propagation moindre que celle de la lame, plus haute que celle-ci. En continuant

le même raisonnement, on voit que l'onde initiale sera suivie de convexités plus élevées que la lame liquide qui suit et de concavités moins élevées que cette même lame, mais tout entières situées au-dessus de la surface libre primitive. Ces convexités et concavités auront des hauteurs décroissantes de l'une à l'autre et bientôt insensibles, à cause sans doute des frottements intérieurs du fluide. D'après ce qui précède, la forme de l'onde n'aura acquis un peu de stabilité que lorsque toutes les parties plus hautes que la lame placée à l'arrière seront convexes, et toutes les parties plus basses concaves, de manière que les points d'inflexion du profil longitudinal soient à peu près sur le prolongement de la surface libre de cette lame.

Quand une intumescence positive, sans être indéfinie, a une grande longueur, la partie moyenne de sa crête est forcément peu convexe, et, d'après la formule (34), se propage plus vite que la partie postérieure de la même crête, partie presque aussi élevée que la précédente, mais d'une convexité bien plus grande. Donc la queue de l'onde tend à se détacher du corps et à former une onde distincte. Le même morcellement continuant, l'intumescence se résoudra en un certain nombre d'ondes solitaires. Ce phénomène a été observé par Scott Russell, qui a même reconnu qu'il s'y forme parfois des ondes négatives, provenant sans doute de dépressions difficiles à éviter à la suite d'une grosse intumescence.

Occupons-nous enfin des ondes négatives, et d'abord de celles qui sont limitées. Leur profil longitudinal le plus simple est composé, peu de temps après leur formation, d'une partie concave plus ou moins profonde, se raccordant en avant et en arrière avec la surface libre primitive par l'intermédiaire de deux arcs convexes. Tant que cette forme n'est pas trop altérée, le centre de gravité général de l'onde se trouve environ au tiers de sa profondeur, et le carré de la vitesse de propagation de ce centre est sensiblement égal, d'après la formule (48), au produit du nombre g par la distance qu'il y a du fond du canal au point le plus bas de la surface libre : c'est bien la loi que les expériences de M. Bazin ont à peu près vérifiée. Mais la forme simple donnée d'abord à la surface libre ne tarde pas à s'altérer : la formule (34) montre en effet que, h étant négatif, les parties concaves pour lesquelles la dérivée seconde de h en x est > 0, se propagent, à hauteur égale,

moins vite que les parties convexes, et que d'autre part, à égalité du rapport de cette dérivée à h, les parties les plus basses de l'onde sont celles qui se propagent avec le moins de célérité. Donc, la tête de la dépression étant plus haute que le corps et se trouvant en même temps convexe, tandis que le corps est concave, se propagera plus vite et s'allongera ainsi de plus en plus en s'aplatissant. La queue, au contraire, allant, pour la même raison, plus vite que le corps, se raccourcira sans cesse tant qu'il y restera, au-dessous de la surface libre primitive, une partie convexe; un tel raccourcissement ne pouvant être indéfini et, d'autre part, une partie convexe étant absolument nécessaire pour le raccordement de l'onde avec la surface libre horizontale qui existe à son arrière, cette partie convexe finira par s'élever tout entière au-dessus de la surface libre primitive : alors, h y étant positif, le dernier terme de la formule (34), devenu négatif, pourra surpasser l'avant-dernier en valeur absolue, d'une quantité telle que le second membre de cette formule n'y soit pas plus grand qu'aux points les plus bas de la dépression. Mais l'onde positive ainsi produite à la suite de l'onde négative donnée aura forcément à son arrière, pour se raccorder avec la surface libre primitive, une partie concave qui ne pourra pas subsister et qui n'aurait pas même pu se former, si sa vitesse de propagation est supérieure à celle de l'onde précédente; la vitesse de propagation de cette partie concave devant être ainsi plus petite que $\sqrt{gH}$, le second membre de (34) montre qu'il faut absolument qu'on y ait $h < 0$, ou que l'onde positive, toute convexe, soit suivie d'une onde négative. En appliquant à celle-ci le raisonnement fait sur la première, on voit qu'il se formera nécessairement, à la suite de l'onde négative donnée, une infinité d'autres ondes, alternativement positives et négatives, c'est-à-dire respectivement situées les premières au-dessus et les secondes au-dessous de la surface libre initiale, et qui seront, les unes entièrement convexes, les autres entièrement concaves, de manière que les points d'inflexion du profil longitudinal se trouvent sensiblement sur le prolongement de cette surface libre primitive. Les ondes auront une énergie décroissante de l'une à l'autre, sans quoi l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} h^2 dx$, dont le produit par ρg est la somme de ces énergies, ne serait pas finie et constante comme on a vu au § III qu'elle l'est.

La tête d'une onde négative, s'allongeant sans cesse, finit par n'avoir plus une courbure appréciable, et aussi par être d'une longueur telle qu'on puisse l'assimiler à une onde négative indéfinie. Une dépression sans fin, telle que sa profondeur croisse de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne de sa tête, est donc le seul genre d'intumescences dont toutes les parties puissent n'avoir que des courbures négligeables. Ce cas mérite un examen particulier; car la formule (34) s'y trouve réduite, par l'hypothèse consistant à supposer insensible la dérivée seconde de h en x, à la forme simple

$$\omega = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3h}{4H}\right), \tag{77}$$

circonstance qui rend intégrable l'équation aux dérivées partielles (29) de la surface libre. Il résulte en effet de (77) qu'on peut écrire

$$h\omega = 2\sqrt{g}\left[(H + h)^{\frac{3}{2}} - (H + h)\sqrt{H}\right], \tag{78}$$

comme on le reconnaît en développant le second membre de (78) suivant les puissances croissantes de h, jusqu'à celle du second degré; l'équation (29) devient par suite

$$\frac{dh}{dt} + \left[3\sqrt{g(H + h)} - 2\sqrt{gH}\right]\frac{dh}{dx} = 0, \tag{79}$$

dont l'intégrale est, avec une fonction arbitraire $f(h)$,

$$x - \left[3\sqrt{g(H + h)} - 2\sqrt{gH}\right]t = f(h). \tag{80}$$

Cette équation exprime que, h ne variant pas, les accroissements de x sont égaux à ceux de t multipliés par $3\sqrt{g(H + h)} - 2\sqrt{gH}$, ou que *la surface libre change d'un instant à l'autre de manière que chacune de ses ordonnées* $H + h$ *se transporte, dans le sens de la propagation de l'onde et en conservant sa grandeur, avec une vitesse égale à la racine carrée du nombre* g, *multipliée par l'excès du triple de la racine carrée de l'ordonnée considérée sur le double de celle de la profondeur primitive.*

La fonction arbitraire $f(h)$ se déterminera de deux manières différentes, suivant que le canal sera indéfini dans les deux sens ou indéfini seulement dans un sens. Dans le premier cas, on donnera généralement, pour $t = 0$, h en fonction de x, et par suite x sera, pour $t = 0$, la fonction inverse de h, fonction justement égale, d'après (80), à $f(h)$. Dans le second cas, je supposerai le canal en communication avec un bassin de dimensions très-grandes où le niveau du liquide variera d'un instant à l'autre d'après une loi donnée, comme il arrive pour un canal qui débouche dans l'Océan : on aura donc, pour $x = 0$, $h =$ une fonction connue de t, ou $t =$ la fonction inverse de h, fonction qui, multipliée par $3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}$, vaudra justement, d'après (80), $f(h)$ changée de signe.

Nous avons vu plusieurs fois, et en particulier ci-dessus (75), que la vitesse moyenne U est égale au quotient de $h\omega$ par $H + h$. La formule (78) donnera donc, sauf erreur très-petite par rapport à h^2,

$$(81) \qquad U = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}.$$

Cette loi et celle que contient la formule (80) ont été trouvées par M. de Saint-Venant [*], pour le cas où le rapport de h à H n'est pas petit et où l'on suppose toujours négligeable la courbure de la surface libre, mais en admettant que U ne varie d'une section à l'autre et d'un instant à l'autre qu'en fonction de h.

Les formules de (77) à (81) sont aussi applicables, dans une intumescence positive continue, à toute la partie qui vient à la suite des renflements initials, et dont la hauteur h est lentement variable d'un point à l'autre [**]. Mais il faut observer qu'elles tombent en défaut

[*] *Voir* la fin de l'introduction du Mémoire actuel.

[**] Si on veut les appliquer à un canal horizontal de longueur infinie et dont l'entrée est en communication avec l'Océan, on aura sensiblement

$$(82) \qquad H + h = a\left(1 + \alpha \sin\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (\text{pour } x = 0),$$

a, α, T, quantités connues, désignant respectivement l'élévation du niveau moyen de la mer au-dessus du fond du canal, le rapport (supposé petit) à cette élévation de la demi-hauteur d'une marée et l'intervalle de temps qui sépare deux marées consécu-

chaque fois que la courbure de la surface libre devient sensible : or cela finit toujours par arriver à la tête de l'onde; car la relation (80) donne la plus grande vitesse de translation aux ordonnées les plus hautes et tend à porter ces ordonnées tout à fait en avant de l'onde, de manière à faire que sa crête antérieure soit à pic et d'une courbure infinie.

---

tives. De cette relation (82) il résulte une valeur de t qui, portée dans la formule (80) spécifiée pour $x = 0$, donne

$$(83)\qquad -f(h) = \left[3\sqrt{g(\mathrm{H}+h)} - 2\sqrt{g\mathrm{H}}\right]\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\arcsin\frac{\mathrm{H}+h-a}{a\alpha},$$

et l'équation (80) de la surface libre devient elle-même

$$(84)\qquad x = \left[3\sqrt{g(\mathrm{H}+h)} - 2\sqrt{g\mathrm{H}}\right]\left(t - \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\arcsin\frac{\mathrm{H}+h-a}{a\alpha}\right).$$

Au bout d'un certain temps, l'état du canal est évidemment réglé de telle manière, que le volume fluide total, $\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{U}(\mathrm{H}+h)dt$, qui y pénètre pendant la durée d'une période, est égal à zéro. On aura donc, pour déterminer H,

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{U}(\mathrm{H}+h)dt = 0 \quad (\text{pour } x = 0),$$

formule que les relations (81) et (82) changent en celle-ci

$$(85)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{a}} &= \int_0^{\mathrm{T}}\left(1+\alpha\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{\mathrm{T}} \\ &= \int_0^{\mathrm{T}}\left(1+\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\frac{3}{8}\alpha^2\sin^2\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}-\frac{1}{16}\alpha^3\sin^3\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}-\ldots\right)\frac{dt}{\mathrm{T}}. \end{aligned}\right.$$

Négligeons les puissances de α^2 supérieures à la première [car la formule (81) n'a été démontrée exacte que jusqu'aux quantités de cet ordre], et il vient

$$(86)\qquad \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{a}} = 1 + \frac{3}{16}\alpha^2, \quad \text{ou} \quad \mathrm{H} = a\left(1+\frac{3}{8}\alpha^2\right).$$

Le niveau moyen de la mer doit donc être un peu plus bas $\left(\text{de la quantité } \mathrm{H}-a = \frac{3}{8}a\alpha^2\right)$ que celui de la surface libre dans les parties du canal, éloignées de l'embouchure, où les oscillations des marées ne se font plus guère sentir et où par conséquent la profondeur reste sensiblement égale à H.

Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces;

PAR M. A. MANNHEIM [*].

Les recherches optiques ont conduit à l'étude des systèmes de droites. Tous les géomètres connaissent le théorème de Malus généralisé par Dupin; mais c'est Hamilton qui, dans sa théorie *Of systems of rays*, a le premier donné à cette étude tout le développement qu'elle comporte.

Dans un premier supplément à cette théorie, inséré dans les *Transactions of the royal Irish Academy*, Hamilton est arrivé à des propriétés des pinceaux encore peu connues aujourd'hui. L'étude générale des systèmes de rayons rectilignes a été reprise analytiquement par Kummer dans un beau Mémoire qui a paru en 1860 (t. 57 du *Journal de Crelle*) : les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, en contiennent une traduction faite par M. Dewulf.

Ce Mémoire renferme certaines propriétés trouvées par Hamilton et d'autres que ce Géomètre n'avait pas remarquées. En terminant, M. Kummer s'attache à montrer la relation intime qui existe entre l'étude des systèmes de rayons et la théorie de la courbure des surfaces.

Dans le présent Mémoire, j'étudierai les pinceaux de droites d'une façon toute géométrique; non-seulement les propriétés des pinceaux sont intéressantes, mais il est utile de les connaître pour pouvoir employer les pinceaux comme élément dans les démonstrations, ainsi que j'aurai l'occasion de le faire plus tard.

Actuellement j'étudierai les pinceaux en eux-mêmes; pour cela j'introduirai les surfaces gauches formées respectivement par une droite du pinceau et chacune des droites infiniment voisines.

[*] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 16 mai 1870.

Ces surfaces, que j'appelle *élémentaires*, seront représentées par de simples lignes droites : *droites auxiliaires*. C'est en 1864 [*] que j'ai présenté à la Société philomathique la construction de la droite auxiliaire d'une surface réglée et l'emploi d'une ou plusieurs droites auxiliaires pour la démonstration de quelques propriétés de ces surfaces.

Dans le troisième Volume de son *Traité de Géométrie descriptive*, M. de la Gournerie a exposé, en les étendant, les résultats que j'avais communiqués sur ce sujet à la Société philomathique.

Malgré l'introduction de la droite auxiliaire dans un ouvrage didactique, je crois utile de commencer ce Mémoire en rappelant ce qui est relatif à cette droite.

Je considère ensuite les surfaces élémentaires d'un pinceau représentées par leurs droites auxiliaires. Toutes les propriétés d'un pinceau se démontrent alors aisément au moyen d'une figure plane, dans laquelle apparaissent toujours une droite et une circonférence de cercle. Cette figure permet de retrouver des propriétés connues et d'autres entièrement nouvelles.

Le pinceau formé par les normales infiniment voisines d'une surface est très-intéressant à examiner. Une surface élémentaire de ce pinceau, surface que j'ai appelée *normalie*, représentée par sa droite auxiliaire, donne lieu à une figure sur laquelle se trouvent groupés tous les éléments relatifs à la théorie de la courbure des surfaces.

On est ainsi amené, non-seulement à une nouvelle exposition de cette théorie, à de nombreux résultats dus à MM. Joachimsthal, Bertrand, Bonnet, Lamarle, Catalan, etc., mais encore à des propriétés qui n'avaient pas été signalées dans les études si nombreuses faites sur ce sujet.

§ I. — Notions préliminaires.

De la droite auxiliaire.

Le *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite* que M. Chasles a publié dans la *Correspondance mathématique de Quetelet*,

[*] Séances des 2, 23 avril et 7 mai.

t. XI, avait surtout pour objet de montrer les avantages que la théorie du rapport anharmonique apporte dans l'étude de la Géométrie; l'égalité de deux rapports anharmoniques donne, en effet, immédiatement une expression de la loi de variation des plans tangents d'une surface réglée.

Cette loi de variation des plans tangents est aussi mon point de départ; mais j'abandonne tout de suite l'expression analytique de cette loi pour sa représentation géométrique. C'est cette représentation qui me donne ce que j'appelle la « droite auxiliaire ».

Prenons une génératrice G d'une surface gauche; tout plan mené par cette droite touche cette surface au point où il est rencontré par la génératrice infiniment voisine de G, c'est-à-dire en un point unique. Pour tout point de G on a pour plan tangent celui qui est déterminé par ce point et par la génératrice infiniment voisine de G. Nous avons donc des points sur la génératrice G et les plans tangents en ces points, qui se correspondent de telle façon qu'à un point correspond un plan tangent et à tout plan mené par G ne correspond qu'un point de contact.

Afin de fixer les positions de ces points et de ces plans, prenons pour origines un point o sur G et le plan tangent en ce point à la surface gauche; les points de la génératrice seront déterminés par leurs distances à o et les plans tangents en ces points par leurs inclinaisons sur le plan tangent en o.

Soient y la distance d'un point quelconque de G au point o et Y l'angle que font entre eux les plans tangents en ces points.

En vertu de la correspondance dont je viens de parler, on doit avoir

$$y \operatorname{tang} Y + \lambda y + \mu \operatorname{tang} Y + \nu = 0,$$

dans laquelle λ, μ, ν sont des constantes.

Cette relation satisfait à la condition de donner pour chaque valeur de y une direction bien déterminée pour le plan tangent au point dont on prend la distance à o, et pour toute valeur de Y une seule valeur de y.

Remarquons maintenant que, y et Y devant s'annuler en même temps, la relation précédente ne doit pas renfermer la constante ν.

La loi de variation des plans tangents aux différents points de G peut donc s'écrire

$$(1) \qquad y + \lambda \frac{y}{\operatorname{tang} Y} + \mu = 0.$$

Posons

$$\frac{y}{\operatorname{tang} Y} = x,$$

cette relation devient

$$y + \lambda x + \mu = 0,$$

équation d'une ligne droite A (*fig.* 1), p. 115, rapportée à G prise pour axe des y et à la perpendiculaire menée du point o à cette droite prise comme axe des x.

Pour un point quelconque a' de A on a dans le triangle oaa' :

$$oa = aa' \operatorname{tang} aa'o$$

ou

$$y = x \operatorname{tang} aa'o,$$

et comme $y = x \operatorname{tang} Y$ nous voyons que l'angle $aa'o$ n'est autre que Y.

Mais l'angle $aa'o$ est égal à l'angle xoa'; on aura donc l'angle Y correspondant au point a, c'est-à-dire l'angle que le plan tangent en a fait avec le plan tangent en o, en prenant l'inclinaison du rayon vecteur oa' sur l'axe des x.

Ainsi, pour un point quelconque a de la génératrice G, on a l'angle que le plan tangent en ce point à la surface gauche fait avec le plan tangent en o en mesurant l'inclinaison sur l'axe des x du rayon vecteur obtenu en joignant l'origine o au point a' qui se projette en a.

La droite A au moyen de laquelle on peut construire les inclinaisons des plans tangents à la surface gauche représente géométriquement la loi de variation exprimée par la relation (1). Nous l'appellerons *droite auxiliaire* relative au point o.

Lorsque le point a s'éloigne du point o, y croît ainsi que Y. Si a est arrivé en n le rayon vecteur correspondant est l'axe des y. Par suite, le plan tangent en ce point est perpendiculaire au plan

tangent en o ou, en d'autres termes, le plan tangent en o est normal en n. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Pour une génératrice* G *d'une surface gauche, la droite auxiliaire* A *relative au point* o *coupe cette génératrice au point où le plan tangent en* o *est normal à la surface gauche.*

Lorsque a s'est éloigné indéfiniment, le rayon vecteur correspondant est la parallèle à A menée du point o. L'inclinaison de A sur l'axe des x est donc l'angle que le plan tangent au point qui est à l'infini sur G fait avec le plan tangent en o. Le plan tangent à l'infini est normal à la surface gauche au point c obtenu en projetant sur G le pied de la perpendiculaire oc' abaissée du point o sur A. Ce point c, dont la considération est très-utile, comme nous le verrons par la suite, a été signalé pour la première fois par M. Chasles [*] qui l'a nommé *point central*.

Nous désignerons avec Bour le plan tangent en ce point sous le nom de *plan central*. D'après ce qui précède :

THÉORÈME II. — *Le plan central, pour la génératrice* G, *fait avec le plan tangent en* o *un angle qui est mesuré par l'inclinaison sur l'axe des* x *de la perpendiculaire abaissée du point* o *sur la droite auxiliaire relative à ce point.*

Pour une même génératrice d'une surface gauche on a des droites auxiliaires relatives aux différents points de cette droite. Dans tous les cas, le point central est le même sur G, puisque c'est le point de contact de la surface gauche avec le plan mené par G perpendiculairement au plan tangent à l'infini. Si nous plaçons notre origine au point c, la droite auxiliaire correspondante sera parallèle à G, car pour obtenir le point central nous avons vu qu'il fallait projeter sur G le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite auxiliaire relative à ce point.

La loi de variation des plans tangents, étant exprimée par l'équation de la droite auxiliaire, est donc dans le cas particulier où l'origine est au point central,

$$x = k,$$

[*] *Correspondance mathématique de Quetelet* (loc. cit.).

k étant une constante, où

$$\frac{y}{\operatorname{tang} Y} = k.$$

On peut écrire $\operatorname{tang} Y = \frac{y}{k}$ et l'on voit alors que :

THÉORÈME III. — *Un plan quelconque étant mené par une génératrice d'une surface gauche, la distance du point où il est tangent à la surface au point central c relatif à la génératrice est proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'inclinaison de ce plan sur le plan tangent en c.* (CHASLES [*].)

La constante k est appelée *paramètre de distribution des plans tangents*. Elle se trouve construite sur la figure; elle est égale à cc'.

Puisque c est un point déterminé de G, et que cc' est une longueur constante, le point c' est déterminé aussi. Donc :

THÉORÈME IV. — *Toutes les droites auxiliaires relatives aux différents points d'une même génératrice passent par un même point.*

Ce point c' étant connu, on a la droite auxiliaire A′ relative à un point quelconque o' en élevant du point c' une perpendiculaire à la droite qui joint ce point au point o'.

PROBLÈME I. — *Connaissant trois points o, a, b d'une génératrice* G *d'une surface gauche et les plans tangents en ces points à cette surface, construire : la droite auxiliaire relative au point o, l'inclinaison sur le plan tangent en o du plan tangent en un point quelconque de* G, *le point central et le paramètre de distribution des plans tangents pour la génératrice* G.

Du point o (*fig.* 1), menons les droites oa', ob' faisant avec ox des angles respectivement égaux aux angles que les plans tangents en a et en b font avec le plan tangent en o. Ces droites rencontrent aux points a' et b' les perpendiculaires menées des points a et b à G : la droite A qui joint ces deux points est la droite auxiliaire relative au point o.

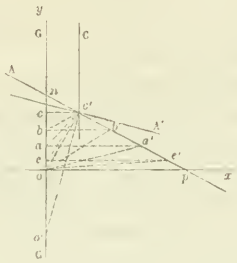
Au point quelconque e de G élevons la perpendiculaire ee' sur cette droite : l'angle xoe' mesure l'inclinaison du plan tangent en e sur le plan tangent en o.

---

[*] *Correspondance mathématique de Quetelet* (loc. cit.).

Abaissons du point o la perpendiculaire oc' sur cette droite : le pied de cette perpendiculaire projeté en c sur G donne le point central; la distance cc' est le paramètre de distribution des plans tangents cherchés.

Fig. 1.



Le problème I se trouve ainsi résolu. Je vais en donner une deuxième solution. Pour cela je vais établir ce théorème qui plus loin nous sera souvent utile :

Théorème V. — *Du point central c sur une génératrice G d'une surface gauche, on élève une perpendiculaire cc' égale au paramètre de distribution des plans tangents à cette surface : l'angle sous lequel on voit du point c' un segment ba de G est égal à l'angle compris entre le plan tangent en b et le plan tangent en a.*

c étant le point central sur la génératrice G d'une surface gauche, et cc' étant le paramètre de distribution, la droite auxiliaire relative au point c est la droite C menée du point c' parallèlement à G. L'angle $cc'a$ est égal à l'angle compris entre le plan tangent en c et le plan tangent en a; de même $cc'b$ est égal à l'angle compris entre le plan tangent en c et le plan tangent en b. Par suite, l'angle $bc'a$, différence de ces deux angles, est égal à l'angle compris entre le plan tangent en b et le plan tangent en a.

Revenons à notre deuxième solution du problème II. Nous connaissons les plans tangents aux trois points a, b, o, et les angles qu'ils font entre eux. Décrivons sur oa un segment capable de l'angle que le plan tangent en o fait avec le plan tangent en a. De même pour o et b : les deux circonférences ainsi déterminées se coupent au

point c'. Le pied c de la perpendiculaire, abaissé de ce point sur G, est le point central, et cc' est le paramètre de distribution.

La droite qui joint le point c' à un point quelconque e de G fait avec cc' un angle qui est égal à l'angle que le plan tangent en e fait avec le plan central.

Au lieu de construire le point central et le paramètre de distribution, on peut se proposer de chercher :

Problème II. — *Quelles sont les expressions de la distance co et de la longueur cc', en fonction de ao, bo, et des angles que font, avec le plan tangent en o, les plans tangents en a et b.*

Prenons la droite G pour axe de y, et la perpendiculaire ox pour axe des abscisses. Appelons a et b les ordonnées des points a' et b', α et β, les angles que les plans tangents en a et b font avec le plan tangent en o. Les abscisses des points a' et b' sont $\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}$ et $\frac{b}{\operatorname{tang}\beta}$.

L'équation de la droite A est

$$y = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a\operatorname{tang}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tang}\alpha}}\,x - \frac{\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tang}\beta}}{\frac{1}{a\operatorname{tang}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tang}\alpha}}.$$

L'équation de la perpendiculaire oc' est

$$y = -\frac{\frac{1}{a\operatorname{tang}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tang}\alpha}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\,x.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à x et y pour avoir les coordonnées de leur point de rencontre c', on trouve

$$(2)\qquad x \text{ ou } cc' = \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tang}\beta}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a\operatorname{tang}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tang}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)},$$

$$y \text{ ou } oc = \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tang}\beta}\right)\left(\frac{1}{b\operatorname{tang}\alpha} - \frac{1}{a\operatorname{tang}\beta}\right)}{\left(\frac{1}{a\operatorname{tang}\beta} - \frac{1}{b\operatorname{tang}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}.$$

On a aussi l'ordonnée à l'origine

$$(4) \qquad on = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\beta} - \dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha}}{\dfrac{1}{a\operatorname{tang}\beta} - \dfrac{1}{b\operatorname{tang}\alpha}},$$

l'abscisse à l'origine

$$(5) \qquad op = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{tang}\beta}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}.$$

Lorsque les angles α et β diffèrent d'un angle droit

$$\operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta = -1$$

et l'on a alors

$$(6) \qquad \frac{1}{on} = \frac{\sin^2\alpha}{a} + \frac{\cos^2\alpha}{b},$$

$$(7) \qquad \frac{1}{op} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sin 2\alpha.$$

On peut encore arriver à la droite auxiliaire de la manière suivante.

Le théorème III, que l'on démontre dans tous les cours de Géométrie descriptive, va nous servir maintenant de point de départ.

Soit G (*fig.* 1) une génératrice d'une surface gauche. Au point central c, élevons une perpendiculaire à G, et portons sur cette droite, à partir du point c, une longueur cc' égale à la constante qui entre dans l'énoncé du théorème III.

L'angle $cc'o$, d'après ce théorème, est l'angle que le plan tangent en o fait avec le plan tangent en c. De même, on a pour le point a l'angle que le plan tangent en ce point fait avec le plan central; par suite, les plans tangents en a et en o comprennent entre eux l'angle $ac'o$. Je mène du point o la droite oa', faisant, avec aa', un angle égal à cet angle $ac'o$.

De cette construction, il résulte que les points $oac'a'$ appartiennent à une même circonférence; mais l'angle oaa' est droit : donc il en est

de même de l'angle $oc'a'$. Ainsi, le point a' est sur la perpendiculaire A, menée du point c' à oc'; comme le point a est arbitraire, tous les points tels que a' appartiennent à la même droite A.

L'angle xoa' est égal à l'angle $aa'o$; mais celui-ci, dans la circonférence $oac'a'$, a même mesure que l'angle $ac'o$. Nous voyons donc que l'angle xoa' est égal à l'angle que font entre eux les plans tangents en a et en o.

Nous avons ainsi la droite auxiliaire A relative au point o, et nous retrouvons la propriété que cette droite possède de permettre de construire les inclinaisons des plans tangents aux différents points de G sur le plan tangent en o.

Enfin, voici une troisième manière d'arriver à la droite auxiliaire.

Considérons une génératrice G (*fig.* 1) d'une surface gauche (G), et le paraboloïde de raccordement le long de cette droite qui a, pour l'un de ses plans directeurs, un plan perpendiculaire à G. On sait que ce paraboloïde a pour sommet le point central c sur G, qu'il a même paramètre de distribution pour la génératrice G et pour la génératrice perpendiculaire à cette droite, menée du point c; enfin, que, sur cette dernière droite, le point c est aussi un point central.

Les deux systèmes de génératrices de ce paraboloïde sont des droites perpendiculaires à G et des droites du même système que cette génératrice.

Une quelconque des génératrices de ce dernier système entraîne la connaissance de tous les plans tangents à la surface (G) aux différents points de G. Le plan tangent en un point a de cette droite est, en effet, le plan contenant G et la perpendiculaire à cette droite issue du point a qui s'appuie sur la génératrice dont je viens de parler. Mais cette génératrice du même système que G nécessite l'emploi de deux plans de projection pour être bien représentée de position par rapport à G.

Nous allons choisir parmi les génératrices de notre paraboloïde celle qui sera bien définie, au moyen d'une seule projection, sur un plan tangent à (G). La projection de cette génératrice sera la droite auxiliaire relative au point de contact de ce plan tangent.

Prenons pour plan horizontal de projection le plan tangent en o à la surface (G), et pour plan vertical un plan perpendiculaire à G

mené du point o. Sur le plan horizontal, toutes les génératrices du même système que G se projettent suivant les droites passant par un même point n situé sur G.

Soit np la droite représentant les deux projections d'une même génératrice : cette droite est, comme je vais le montrer, la droite auxiliaire relative au point o.

Prenons un point a sur G. La génératrice passant en ce point, qui est perpendiculaire à G, a pour projection horizontale aa', et pour projection verticale oa'. Le plan tangent en a a donc pour trace verticale oa'; et comme il est perpendiculaire au plan vertical de projection, poa' mesurent l'angle qu'il fait avec le plan horizontal, c'est-à-dire avec le plan tangent en o. Nous voyons donc déjà que la droite np permet de construire les inclinaisons des différents plans tangents aux points de G sur le plan tangent en o.

Cherchons le point central sur G. Pour cela, menons la perpendiculaire commune à G et à la droite projetée suivant np. La projection verticale de cette perpendiculaire est oc'; sa projection horizontale est cc', et par suite, d'après ce que nous avons dit plus haut, son pied c sur G est le point central relatif à cette génératrice.

Cherchons le paramètre de distribution des plans tangents à la surface (G) pour G.

Ce paramètre est le même que pour le paraboloïde de raccordement, et, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, il est égal au paramètre de distribution des plans tangents à ce paraboloïde pour la génératrice dont les projections sont (oc', cc'). Le point central sur cette droite a pour projection (o, c); le plan central est le plan $c'oG$; le plan tangent en c' au paraboloïde est déterminé par la droite (oc', cc') et par la droite projetée en np : l'angle de ces deux plans est l'angle de G et de la droite projetée suivant np.

Si nous désignons cet angle par ξ, le paramètre de distribution est égal à $\frac{oc'}{\operatorname{tang}\xi}$. Comme G est perpendiculaire au plan vertical de projection, ξ est le complément de l'angle que fait avec le plan vertical la droite projetée suivant np. La tangente de ce dernier angle est $\frac{no}{np}$; le paramètre cherché est donc $\frac{oc' \times no}{np}$.

Mais les triangles semblables onp et $cc'o$ donnent $\frac{no}{np} = \frac{cc'}{oc'}$; introduisant cette valeur de $\frac{no}{np}$ dans l'expression du paramètre, nous voyons que celui-ci est égal à cc'. Nous retrouvons donc, pour la droite np, les propriétés de la droite auxiliaire.

Il nous reste à voir comment est placée dans l'espace la génératrice projetée suivant np. Cette droite est dans le plan mené par op, et qui est également incliné sur les deux plans de projection. Ce plan, qui est tangent en p à notre paraboloïde, fait un angle de 45 degrés avec le plan tangent en o. Nous voyons donc qu'on obtient *la droite auxiliaire relative au point o, en projetant sur le plan tangent en ce point la droite suivant laquelle notre paraboloïde de raccordement est coupé par le plan mené par op, et faisant avec le plan tangent en o un angle de* 45 *degrés.*

On peut bien mener ainsi deux plans tangents; mais ils donnent simplement deux droites symétriques par rapport à G. On peut employer l'une ou l'autre de ces droites comme droite auxiliaire.

Pour la génératrice op, o est le point central, op est le paramètre de distribution, puisque le plan tangent en p fait un angle de 45 degrés avec le plan tangent en o. Appelons o_1 un point situé sur op et infiniment voisin du point o; le paramètre de distribution op est la limite du rapport de la distance oo_1 à l'angle compris entre le plan tangent en o et le plan tangent en o_1.

Si nous désignons cet angle par X, on a

$$\operatorname{tang} X = \frac{oo_1}{op};$$

et remplaçant op par sa valeur (7), il vient

$$\operatorname{tang} X = \frac{oo_1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sin 2\alpha. \tag{8}$$

Nous avons ainsi l'expression de l'angle dont tourne le plan tangent en o, lorsqu'on passe de ce point au point o_1, étant donnés les plans tangents aux trois points o, a, b; les plans tangents en a et b étant rectangulaires.

§ II. — Des pinceaux de droites.

Les droites que je considérerai sont celles qui sont déterminées par la connaissance d'un de leurs points; toutes ces droites sont donc assujetties à deux conditions.

En prenant une de ces droites et toutes celles qui lui sont infiniment voisines, on aura ce que j'appellerai un *pinceau de droites*.

J'adopterai l'expression de *pinceau*, ainsi que plusieurs autres dérivant de l'optique. M. Kummer les a déjà employées dans son étude générale des systèmes de rayons rectilignes.

Ainsi je dirai *rayons d'un pinceau* au lieu de droites d'un pinceau.

Coupons un pinceau par une surface quelconque (S); soit a le point où cette surface coupe le rayon G. Prenons sur ce rayon deux points b et c et portons sur tous les rayons du pinceau à partir des points où ils rencontrent (S) des longueurs constantes égales à ab et ac.

Les points tels que b appartiendront à une surface $(S)_1$ et les points tels que c à une surface $(S)_2$.

Les rayons infiniment voisins du pinceau peuvent être considérés comme les différentes positions d'une droite G que l'on déplace en l'assujettissant à avoir trois de ses points a, b, c sur trois surfaces données : (S), $(S)_1$, $(S)_2$.

Tout autre point de G, pendant les déplacements de cette droite, restera sur une surface que j'ai appelée *surface trajectoire*. Il est facile de voir que les *normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite issues des différents points de cette droite appartiennent à une hyperboloïde* [*].

Cette hyperboloïde admet deux génératrices réelles ou imaginaires perpendiculaires à G. Les points f_1, f_2 où ces droites coupent G sont des points dont les surfaces trajectoires $(F)_1$, $(F)_2$ sont tangentes aux rayons du pinceau. Nous arrivons ainsi à cette propriété fondamentale:

Théorème VI. — *Les rayons d'un pinceau sont tangents à deux surfaces réelles ou imaginaires.* (Malus) [**].

---

[*] *Voir* la Note placée à la fin de ce Mémoire.

[**] *Journal de l'École Polytechnique*, 14e cahier.

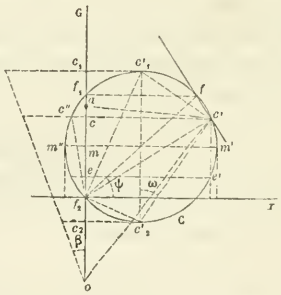
Nous appellerons ces surfaces *surfaces focales*. Les points de contact d'un rayon avec les surfaces focales seront nommés *foyers* du rayon et les plans tangents en ces points aux surfaces focales seront désignés sous le nom de *plans focaux* (Kummer, *loc. cit.*).

C'est en nous appuyant sur le théorème VI qu'au moyen de droites auxiliaires nous allons trouver un grand nombre de propriétés des pinceaux.

Soient G (*fig.* 2) un rayon d'un pinceau, f_1 et f_2 les foyers de ce rayon. Quel que soit le rayon infiniment voisin de G, il détermine avec cette droite un élément de surface gauche, *surface élémentaire du pinceau*, donnant lieu à une droite auxiliaire relative à une origine prise sur G.

Si nous prenons f_2 pour origine, les droites auxiliaires de toutes les surfaces élémentaires passeront par un même point f, puisque ces surfaces sont tangentes en f_1 et f_2 aux surfaces focales.

Fig. 2.



Traçons la droite auxiliaire fc' pour une des surfaces élémentaires du pinceau, le point central sur G s'obtient comme nous savons, en projetant en c sur cette droite le pied de la perpendiculaire c' abaissée du point f_2 sur la droite auxiliaire fc'.

L'angle $f_2 c' f$ étant droit, les points tels que c' sont sur la circonférence qui contient les trois points f_2, f_1, f.

Les points centraux, d'après cela, occupent sur G la portion de cette

droite qui est la projection du diamètre de cette circonférence. Nous voyons donc que :

THÉORÈME VII. — *Les points centraux de toutes les surfaces élémentaires d'un pinceau se trouvent sur un segment déterminé du rayon de ce pinceau.* (KUMMER.)

M. Kummer appelle *points limites* les points c_1, c_2, qui limitent ce segment de G. En appelant $2d$ la longueur de ce segment, et ψ l'angle que font entre eux les plans focaux, on a, dans le triangle $f_2 f_1 f$:

$$f_1 f_2 = 2d \sin\psi,$$

et l'on voit que :

THÉORÈME VIII. — *La distance focale est égale à la distance qui sépare les points limites multipliés par le sinus de l'angle que font entre eux les plans focaux.*

La surface élémentaire dont la droite auxiliaire est fc' a son paramètre de distribution de ses plans tangents égal à cc' ; de même, pour une autre surface élémentaire, on aura un point tel que c' sur la circonférence qui passe par les points f_1, f_2, f. On voit donc que :

THÉORÈME IX. — *Si dans un plan passant par un rayon d'un pinceau on porte, sur des perpendiculaires à ce rayon élevées des points centraux des surfaces élémentaires et à partir de ces points, des longueurs égales aux paramètres de distribution de ces surfaces, les extrémités des longueurs ainsi portées sont sur une circonférence C passant par les foyers du rayon.*

Propriété remarquable qui subsiste pour un pinceau dont les foyers sont imaginaires.

Les plans centraux correspondant aux points limites ont été nommés par M. Kummer *plans principaux*. L'angle compris entre ces plans étant égal à $c'_2 f_2 c'_1$ est droit. Nous voyons donc que :

THÉORÈME X. — *Aux points limites les plans centraux des surfaces élémentaires sont perpendiculaires entre eux.* (KUMMER.)

Appelons l la distance d'un point quelconque o de G au point central c, l_1 et l_2 les distances du même point o aux points limites, ω l'angle que le plan central en c fait avec le plan principal en c_1, sur la figure ω est égal à l'angle $c' f_2 c'_1$ ou à l'angle $c' c'_2 c'_1$.

Dans le triangle $c'c'_2c'_1$ on a

$$c'_1c'_2 = \frac{c'c'_2}{\cos\omega},$$

mais

$$c'c'_2 = \frac{cc_2}{\cos\omega};$$

on a donc

$$c'_1c'_2 = \frac{cc^2}{\cos^2\omega},$$

c'est-à-dire

$$l_1 - l_2 = \frac{l - l_2}{\cos^2\omega},$$

ou

$$(9) \qquad l_1\cos^2\omega + l_2\sin^2\omega = l.$$

Cette élégante relation est due à Hamilton.

Menons, à partir du point o, une droite faisant avec G un angle β Elle est coupée par les tangentes $c_1c'_1$, $c_2c'_2$ et par la droite cc' en des points dont je désignerai les distances au point o par l'_1, l'_2, l'. On a

$$l = l'\cos\beta$$
$$l_1 = l'_1\cos\beta$$
$$l_2 = l'_2\cos\beta;$$

par suite, la relation (9) devient

$$l'_1\cos^2\omega + l'_2\sin^2\omega = l'.$$

On peut déduire de là le théorème suivant :

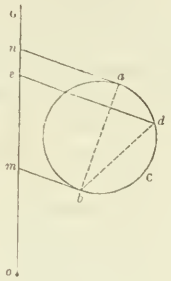
Théorème XI. — *On donne (fig. 3) une droite* G, *une circonférence* C *et deux tangentes an, bm, parallèles entre elles : quelle que soit la droite de parallèle à ces deux tangentes, on a*

$$on\cos^2 dba + om\sin^2 dba = oe.$$

Ce théorème nous sera utile plus loin.

Un point central c sur G (*fig.* 2, p. 122) correspond à deux surfaces élémentaires; les paramètres de ces surfaces sont cc', cc''. Les plans cen-

Fig. 3.



traux de ces surfaces sont également inclinés sur les plans principaux, puisque l'angle $c'f_2c'_1$ est égal à l'angle $c'_1 f_2 c''$. Ce dernier résultat peut s'énoncer ainsi :

Théorème XII. — *Les plans centraux de deux surfaces élémentaires ayant le même point central sont également inclinés sur les plans principaux.*

Si l'on considère en particulier le point milieu de la distance focale, point que nous appellerons avec M. Kummer *centre du rayon*, les plans centraux des surfaces élémentaires ayant en ce point leur point central sont rectangulaires.

On voit sur la figure que $cc' \times cc''$ est égal à $cf_1 \times cf_2$; on peut donc dire :

Théorème XIII. — *Deux surfaces élémentaires ayant même point central sont telles que le produit de leurs paramètres de distribution est égal au produit des distances de leur point central aux foyers du rayon.*

On peut remarquer que les valeurs extrêmes des paramètres de distribution des surfaces élémentaires d'un pinceau correspondent aux surfaces ayant le centre du rayon pour point central.

Menons $c'e'$ parallèlement à G : les points c et e également éloignés

du centre du rayon sont les points centraux de deux surfaces élémentaires ayant même paramètre de distribution. Les plans centraux de ces surfaces sont évidemment également inclinés sur les plans centraux des surfaces élémentaires ayant le centre du rayon pour point central. On peut énoncer ainsi ce dernier résultat :

THÉORÈME XIV. — *Deux surfaces élémentaires d'un pinceau ayant même paramètre de distribution ont leurs points centraux à égale distance du centre des rayons du pinceau et leurs plans centraux également inclinés sur les plans centraux relatifs à ce centre.*

Cherchons l'expression du paramètre de distribution cc' ou k d'une surface élémentaire dont le point central est c (*fig.* 2), en fonction des valeurs extrêmes k_1, k_2 des paramètres de toutes les surfaces élémentaires et de l'angle φ que le plan central de cette surface fait avec le plan central relatif à la surface dont le paramètre est maximum. Pour trouver cette relation, nous n'avons qu'à appliquer le théorème XI, en considérant les tangentes à la circonférence qui sont parallèles à G, et la parallèle à cette même droite menée du point c'; on a alors

$$k = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi, \tag{10}$$

relation tout à fait analogue à la relation (9).

Prenons un segment de G et les plans tangents aux extrémités de ce segment à une surface élémentaire, l'angle compris entre ces plans est ce que M. Kummer a appelé *l'angle de déviation relatif au segment.*

Si nous considérons le segment oa (*fig.* 2) et la surface élémentaire dont le point central est c et le paramètre cc', l'angle de déviation pour ce segment, d'après le théorème V, est égal à l'angle $ac'o$.

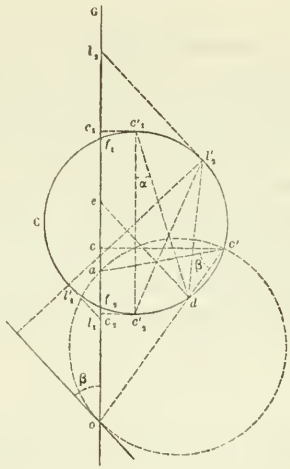
Les angles de déviation pour un même segment qui correspondent à toutes les surfaces élémentaires du pinceau sont donc les angles sous lesquels on voit ce segment des différents points de la circonférence C. Les points pour lesquels on obtiendra les valeurs extrêmes de cet angle sont évidemment les points de contact avec C des deux circonférences menées par les points a et o.

A un angle de déviation donné correspond, pour une même surface élémentaire, une infinité de segments. Nous allons considérer les seg-

ments ayant même origine sur G, correspondant à un angle de déviation donné, et relatifs à toutes les surfaces élémentaires du pinceau. Nous nous proposons de chercher la relation qui existe entre l'un quelconque de ces segments et les segments de valeurs extrêmes.

Soient o (*fig.* 4) l'origine des segments sur G, et β l'angle de déviation donné; pour construire un des segments, on joint le point o à un point quelconque c' de la circonférence C, et l'on mène la droite $c'a$ telle que l'angle $ac'o$ soit égal à β : oa est l'un des segments.

Fig. 4.



Circonscrivons une circonférence au triangle $oc'a$: cette circonférence est tangente en o à une droite menée du point o qui fait avec G l'angle donné β. On peut dire que les segments cherchés sont interceptés sur G par des circonférences tangentes en o à cette dernière droite.

Par suite, on aura les valeurs extrêmes de ces segments en prenant parmi toutes ces circonférences celles qui sont tangentes à C : désignons par R_1, R_2 ces valeurs extrêmes.

Cherchons l'angle que le plan tangent en o, à la surface élémentaire dont le point central est c et le paramètre cc', fait avec le plan principal relatif au point limite c_2. Le plan tangent en o à cette surface et le plan focal en f_2 comprennent entre eux un angle dont la mesure est la moitié de l'arc $f_2 d$. Le plan focal en f_2 fait avec le plan principal en c_2 un angle dont la mesure est la moitié de l'arc $f_2 c'_2$. L'angle que nous cherchons, et que je désignerai par α, a donc pour mesure la moitié de l'arc $c'_2 d$. On voit alors que l'angle $c'_2 c'_1 d$ est égal à α.

Ce que nous nous proposons de trouver c'est l'expression de oa en fonction de α, R_1, R_2.

Pour cela transformons par rayons vecteurs réciproques les circonférences qui donnent les segments tels que oa en prenant le point o pour pôle de transformation et la puissance de telle façon que la circonférence C soit transformée en elle-même. Les circonférences que nous transformons, étant tangentes entre elles au pôle de transformation, deviennent des droites parallèles entre elles faisant avec G l'angle β. Les circonférences qui ont donné les segments R_1, R_2 deviennent les tangentes à C parallèles à la direction commune de toutes ces droites. Ces tangentes $l_1 l'_1$, $l_2 l'_2$ touchent C en l'_1, l'_2 aux extrémités d'un diamètre de C qui fait avec G un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$.

La circonférence oac' se transforme en une droite ed parallèle aux tangentes dont je viens de parler. En appliquant le théorème XI, on a

$$ol_2 \sin^2 l'_1 l'_2 d + ol_1 \cos^2 l'_1 l'_2 d = oe;$$

mais

$$ol_2 . R_2 = ol_1 . R_1 = oe \times oa = \text{const}.$$

On a alors

$$(11) \qquad \frac{\sin^2 l'_1 l'_2 d}{R_2} + \frac{\cos^2 l'_1 l'_2 d}{R_1} = \frac{1}{oa};$$

mais l'angle

$$l'_1 l'_2 d = l'_1 l'_2 c'_2 + \alpha = \frac{\frac{\pi}{2} - \beta}{2} + \alpha,$$

car l'angle $l'_1 l'_2 c'_2$ est la moitié de l'angle que $l'_1 l'_2$ fait avec $c'_1 c'_2$

la relation précédente devient donc

$$(12)\qquad \frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\right)}{R_1}+\frac{\sin^2\left(\alpha+\frac{\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\right)}{R_2}=\frac{1}{oa},$$

qui est la relation cherchée.

Cette formule très-élégante est due à M. Kummer.

Lorsque β est égal à $\frac{\pi}{2}$, cette formule devient

$$\frac{\cos^2\alpha}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha}{R_2}=\frac{1}{oa},$$

qui avait été donnée par Hamilton. Les extrémités des segments correspondant à cette déviation sont l'origine o, et les points où les plans tangents aux surfaces élémentaires en o sont normaux à ces mêmes surfaces.

On peut énoncer ainsi ce dernier résultat :

Théorème XV. — *Si un plan, passant par un rayon* G *d'un pinceau, tourne autour de cette droite, il touche successivement en o les surfaces élémentaires du pinceau : les distances du point o aux points où il est respectivement normal à ces surfaces sont données par la relation*

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\alpha}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha}{R_2},$$

ρ étant la distance du point o au point où le plan tangent en o à une des surfaces élémentaires est normale à cette même surface; R_1 *et* R_2 *étant les valeurs extrêmes de ρ, α étant l'angle que le plan correspondant à ρ fait avec l'un des plans principaux du pinceau.*

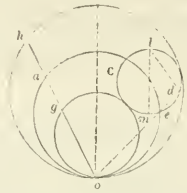
La relation (11), qui nous a donné la formule (12), de M. Kummer, exprime le théorème de Géométrie élémentaire qui suit :

Théorème XVI. — *On a deux circonférences tangentes entre elles en o (fig. 5) et tangentes à une circonférence* C. *On trace une troisième circonférence tangente aux deux premières en o, elle coupe* C *au point e; on joint le point o au point e, cette droite coupe* C *au point d. On mène le diamètre lm de* C *parallèlement à la ligne des*

centres des trois autres circonférences. On a, quelle que soit la droite oh menée du point o et quel que soit le point e sur C,

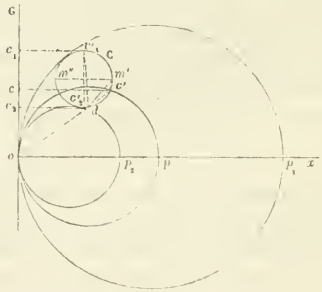
$$\frac{\cos^2 mld}{oh} + \frac{\sin^2 mld}{og} = \frac{1}{oa}. \tag{13}$$

Fig. 5.



Reprenons la droite G du pinceau (*fig.* 6) et la circonférence C; traçons des circonférences tangentes en o à G et tangentes à C; nous

Fig. 6.



avons ainsi deux circonférences coupant ox au point p_1, p_2. Traçons une troisième circonférence tangente en o à G rencontrant C au point c' et la droite ox au point p.

En appliquant le théorème précédent, on a

$$\frac{\cos^2 m''m'd}{op_1} + \frac{\sin^2 m''m'd}{op_2} = \frac{1}{op}.$$

Mais l'angle $m''m'd$ est égal à $\frac{\pi}{4} + \alpha$, puisque l'angle $c'_1c'_2d$ est égal à α. On a donc

$$(14) \qquad \frac{\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{op_1} + \frac{\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{op_2} = \frac{1}{op}.$$

Nous savons que op est égal à $\frac{oo_1}{\operatorname{tang} X}$ (p. 120); si l'on marche toujours perpendiculairement à G, à partir du point o, de la même longueur infiniment petite oo_1, en appelant X_1, X_2 les valeurs extrêmes de X, la formule (14) devient

$$(15) \qquad \operatorname{tang} X = \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tang} X_1 + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tang} X_2,$$

ou simplement, en prenant les angles infiniment petits pour les tangentes,

$$(16) \qquad X = \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) X_1 + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) X_2.$$

Cette formule donne l'angle dont tourne le plan tangent en o à une surface élémentaire, lorsqu'on marche, à partir de ce point, sur cette surface, perpendiculairement au rayon et d'une quantité infiniment petite en fonction des valeurs extrêmes que cet angle peut acquérir.

Appelons X′ la valeur de X lorsqu'on remplace dans la formule (16) α par $\alpha + \frac{\pi}{2}$; on a alors évidemment

$$X + X' = X_1 + X_2.$$

On peut donc énoncer la propriété suivante :

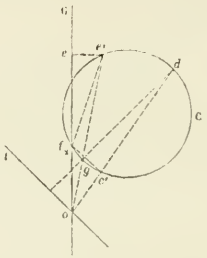
Théorème XVII. — *On prend dans un pinceau deux surfaces élémentaires perpendiculaires entre elles au point o; le plan tangent en ce point à chacune de ces surfaces, lorsqu'on marche sur chacune d'elles d'une même longueur infiniment petite, perpendiculaire à* G, *tourne respectivement d'un certain angle : la somme algébrique de ces deux angles est constante, quelles que soient les surfaces élémentaires considérées.* (Sturm) [*].

[*] *Mémoire sur la vision* (*Comptes rendus*, année 1845).

Pour terminer ici ce qui concerne les pinceaux, je vais faire voir que les valeurs extrêmes qui entrent dans les différentes relations précédentes correspondent toujours à des surfaces élémentaires rectangulaires à l'origine o.

Pour déterminer ces valeurs extrêmes, nous avons toujours eu à construire des circonférences tangentes en o à une certaine droite ot (*fig.* 7) et tangentes à C.

Fig. 7.



Les points de contact avec C s'obtiennent de la manière suivante : on mène le diamètre de la circonférence C qui est perpendiculaire à la droite ot; on joint les extrémités de ce diamètre au point o; ces droites coupent C aux points de contact cherchés. Ce sont ces points qui, projetés sur G, donnent les points centraux des surfaces élémentaires donnant lieu à des valeurs extrêmes.

Je dis que ces deux surfaces élémentaires sont rectangulaires en o: l'angle que le plan tangent en o à l'une d'elles fait avec le plan focal f_2 est égal à $f_2c'o$; l'angle analogue pour l'autre est $f_2e'o$, et la différence de ces deux angles, comme on le voit par leur mesure, est bien égale à un droit.

§ III. — Des normalies.

Le pinceau que nous allons maintenant étudier est celui qui est composé de normales à une surface.

Les surfaces élémentaires de ce pinceau sont des éléments de *nor-*

malies. J'ai appelé ainsi le lieu des normales à une surface qui s'appuient sur une courbe tracée sur cette surface.

Il résulte du théorème VI que toutes les normales qui constituent le pinceau que nous allons étudier sont tangentes à deux surfaces.

Mais, comme rien ne prouve que ces surfaces soient réelles, je vais reprendre par une autre méthode la démonstration de cette propriété des rayons de ce pinceau, démonstration qui fera bien voir que les foyers sont réels.

Pour cela, je ferai usage de ce théorème, relatif aux déplacements d'une figure de forme invariable qui reste assujettie à quatre conditions :

THÉORÈME XVIII. — *Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace de manière que quatre points restent sur quatre surfaces données, à un instant quelconque, les normales, issues respectivement des points de la figure, aux surfaces trajectoires de ces points rencontrent deux mêmes droites* [*].

Supposons que trois points, a, b, c, d'une figure de forme invariable restent sur une même surface (S) et qu'un quatrième point e de la figure se déplace sur une surface (E). Pour déterminer les deux droites, que j'appellerai D et Δ, qui entrent dans l'énoncé précédent, il suffit de construire les deux droites rencontrant à la fois les normales issues des points a, b, c, e aux surfaces sur lesquelles se déplacent ces points.

Lorsque les points b et c se sont rapprochés indéfiniment du point a, la figure mobile est alors assujettie, pendant son déplacement, à avoir un de ses plans (P) tangent en un point a de ce plan à une surface (S), le point e restant toujours sur la surface (E).

Les deux droites D, Δ rencontrent maintenant trois normales infiniment voisines de (S) et la normale à la surface trajectoire du quatrième point e. Mais le déplacement de la figure mobile est le même, quels que soient les points infiniment voisins du point a que l'on considère sur le plan (P). Les deux droites D, Δ doivent donc être rencontrées par toutes les normales à (S) issues des points infiniment voisins du point a.

Les plans passant par la normale en a et par chacune des droites D

[*] *Voir* la Note placée à la fin de ce Mémoire.

et Δ sont donc tangents à toutes les normalies à (S) dont les directrices sont des courbes tracées sur cette surface à partir du point a.

La normale A en a, qu'on peut regarder comme une droite de la figure mobile, décrit donc, pendant tous les déplacements, des surfaces ayant deux mêmes plans tangents. Les deux droites D, Δ sont les deux axes simultanés de rotation au moyen desquels on peut obtenir ces déplacements.

De l'existence de ces déplacements et de la possibilité de les obtenir au moyen des droites D, Δ, on peut déjà conclure que ces droites sont réelles. Mais je vais encore montrer ce résultat comme une conséquence du théorème XVIII.

La propriété des normalies à (S) autour du point a d'être tangentes entre elles aux deux mêmes points situés sur la normale A, points que je désignerai par f_1, f_2, est indépendante de la position de la surface (E). Si cette surface vient à changer, les droites D et Δ seront différentes, mais elles passeront toujours par les deux mêmes points f_1, f_2. Il suffit donc, pour montrer que ces points sont réels, de faire voir qu'on peut construire un couple de droites réelles, telles que D, Δ. Ces droites sont des génératrices de l'hyperboloïde qui a pour directrices trois normales à (S); elles passent par les points où cette hyperboloïde est rencontrée par la normale en e à (E). Nous pouvons toujours disposer de cette dernière normale pour avoir, avec l'hyperboloïde, des points de rencontre réels. Nous avons donc alors des droites D, Δ, et des points f_1, f_2 qui sont réels.

Examinons maintenant la situation des plans tangents en ces points à toutes les normalies, plans tangents qui sont les plans focaux du pinceau.

Ces plans sont, comme je l'ai déjà dit, les plans menés par la normale A et par les droites D et Δ. Mais, parmi les déplacements de A, il y en a deux qui sont obtenus par de simples rotations autour de chacune des droites D et Δ. En tournant autour de D, la droite A doit engendrer une surface dont le plan tangent doit être le plan (A, Δ).

De là résulte que les plans (A, D) et (A, Δ) sont perpendiculaires entre eux.

Nous pouvons maintenant énoncer plus complétement le théorème VI en disant :

Théorème XIX. — *Lorsqu'un pinceau est formé par les normales à une surface, les foyers sont réels et les plans focaux sont perpendiculaires entre eux.*

Nous avons aussi ce théorème :

Théorème XX. — *Parmi les surfaces élémentaires d'un pinceau de normales, il y a deux normalies développables; ces normalies se coupent à angle droit.*

Propriété que Monge a énoncée ainsi [*] :

Théorème XXI. — *Toute normale à une surface courbe est toujours rencontrée par deux autres normales, infiniment voisines, placées dans deux plans normaux, rectangulaires entre eux.*

Nous venons de voir (théorème XX) qu'à partir d'un point sur une surface il y a deux directions rectangulaires pour lesquelles on a des normalies développables.

Si l'on prend les lignes tracées sur (S) qui jouissent de cette propriété : que les normalies dont elles sont les directrices sont développables, on aura les lignes signalées pour la première fois par Monge et qu'il a appelées *lignes de courbure*. Les lignes de courbure se rencontrent toujours à angle droit, ainsi que les normalies développables dont elles sont les directrices. Il est facile de voir que les lignes de courbure d'une surface de révolution sont les méridiens et les parallèles et que les lignes de courbure d'une surface développable sont les génératrices de cette surface et leurs trajectoires orthogonales.

Revenons au pinceau de normales.

Puisque ses plans focaux sont perpendiculaires entre eux, en vertu du théorème VIII, la distance focale est égale à la distance des points limites. Il résulte de là que la circonférence C, caractéristique du pinceau de normales, a pour centre le centre du rayon de ce pinceau.

Reprenons les propriétés générales des pinceaux et examinons ce qu'elles deviennent lorsqu'on se place dans ces conditions nouvelles.

C ayant son centre sur G, on voit alors que les points limites sont confondus avec les foyers; les plans principaux sont aussi confondus avec les plans focaux. Le théorème IX nous donne alors celui-ci :

---

[*] *Application de l'Analyse à la Géométrie.*

Théorème XXII. — *Dans un plan passant par une normale* G *d'une surface, on porte sur les perpendiculaires à cette droite, menées des points centraux de toutes les normalies contenant* G, *et à partir de ces points, des longueurs égales au paramètre de distribution des plans tangents à ces normalies : les extrémités de ces perpendiculaires appartiennent à une circonférence dont le centre est sur* G.

Pour interpréter géométriquement des résultats obtenus pour un pinceau quelconque, je vais d'abord établir le théorème suivant :

Théorème XXIII. — *Si à partir d'un point o sur une surface* (S) *on trace une courbe quelconque et qu'on prenne cette courbe comme directrice d'une normalie, le plan tangent en o à cette surface lui est normal au centre de courbure correspondant au point o de la section suivant laquelle il coupe* (S).

Appelons (s) la courbe d'intersection de (S) et du plan tangent en o à la normalie, et o_1 le point de cette courbe infiniment voisin de o, les plans normaux en o et o_1 se coupent suivant une droite qui passe par le centre de courbure de (s). Cette droite est la caractéristique du plan normal en o à (s) considéré comme se déplaçant en restant normal à cette courbe.

Cette caractéristique passe par le point où le plan normal en o à (s) touche la normalie [*], et comme ce point de contact n'est autre que le point où le plan tangent en o à la normalie est normal à cette surface, le théorème est démontré.

Le théorème XV qui a conduit à la relation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} \tag{17}$$

nous donne alors maintenant la valeur du rayon de courbure d'une section normale faite dans une surface (S), en fonction des valeurs extrêmes de ce rayon.

D'après la construction donnée pour trouver ces valeurs extrêmes, nous voyons que R_1 est égal à of_1 et R_2 est égal à of_2; f_1 et f_2 sont par rapport à (S) les centres de courbure principaux correspondant au

[*] En vertu de ce théorème : *Lorsqu'un plan mobile passe successivement par les différentes génératrices d'une surface réglée, sa caractéristique, à un instant quelconque, passe par le point où il touche cette surface.*

point o et les rayons de courbure R_1 et R_2 qui sont, l'un maximum et l'autre minimum, parmi tous les rayons de courbure des sections déterminées dans (S) par des plans normaux à cette surface en o, sont désignés sous le nom de *rayons de courbure principaux*. Nous pouvons dire :

THÉORÈME XXIV. — *Les plans focaux d'un pinceau de normales sont les plans qui déterminent des sections pour lesquelles les rayons de courbure sont l'un maximum, l'autre minimum.*

Par rapport à (S), ces plans focaux sont désignés sous le nom de *plans des sections principales*. Nous pouvons maintenant, en employant ces expressions, énoncer la propriété importante suivante :

THÉORÈME XXV. — *A partir d'un point o sur une surface* (S), *on trace des courbes quelconques que l'on prend pour directrices de normalies à* (S); *toutes ces normalies sont tangentes entre elles aux centres de courbure principaux de* (S) *qui correspondent à o; les plans tangents communs en ces points sont les plans des sections principales menées par la normale en o.*

La relation (17), que l'on doit à Euler, permet de déterminer le rayon de courbure d'une section normale; cherchons comment on peut trouver le rayon de courbure d'une courbe quelconque E tracée à partir du point o sur (S).

Soit o_1 un point infiniment voisin du point o sur la courbe E. Les plans normaux à cette courbe, menés des points o et o_1, se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan osculateur en o de la courbe donnée; le pied de cette droite sur ce plan osculateur est le centre de courbure de la courbe E correspondant au point o.

Cette droite d'intersection est la caractéristique du plan normal en o considéré comme se déplaçant en restant normal à la courbe E. Cette caractéristique passe par le point où le plan normal en o à la courbe donnée touche la normalie à (S) dont E est la directrice [*].

Ce point de contact, étant le point où le plan normal à (S) mené tangentiellement à la courbe E est normal à cette normalie, n'est autre que le centre de courbure de la section déterminée dans (S) par ce dernier plan. (Théorème XXIII.)

[*] En vertu du théorème énoncé au bas de la page précédente.

On voit donc que :

Théorème XXVI. — *Le centre de courbure de la courbe* E *tracée sur* (S) *et qui correspond au point o est la projection, sur le plan osculateur de cette courbe en ce point, du centre de courbure de la section faite dans* (S) *par le plan normal à cette surface mené tangentiellement en o à* E.

Ce théorème, dû à Meusnier, permet de déterminer le rayon de courbure en un point d'une section oblique d'une surface lorsqu'on connaît le rayon de courbure de la section normale qui lui est tangente en ce point.

Reprenons la relation d'Euler : supposons qu'on remplace dans cette relation

$$\rho \text{ par } \lambda d^2, \quad R_1 \text{ par } \lambda a^2 \quad \text{et} \quad R_2 \text{ par } \lambda b^2,$$

on a alors

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}. \tag{18}$$

Cette équation représente une conique.

Construisons cette courbe et plaçons-la sur le plan tangent en o à (S) de façon que son centre soit en o, et que son grand axe soit dans le plan de la section principale dont le rayon de courbure est maximum, cette conique, dont on doit la considération à M. Dupin, est désignée sous le nom d'*indicatrice*. Un plan normal en o a pour trace sur le plan tangent en ce point à (S) un diamètre de cette conique. La racine carrée de ce demi-diamètre est proportionnelle au rayon de courbure de la section que ce plan détermine avec (S). C'est ce qu'il est facile de voir en comparant les équations (17) et (18).

Lorsque, pour un point o, les centres de courbure principaux sont sur la normale en o d'un même côté de ce point, l'indicatrice est une ellipse.

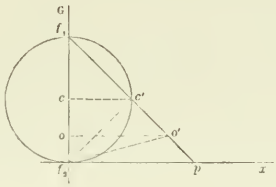
Lorsqu'ils sont de part et d'autre du point, l'indicatrice est une hyperbole et la surface est en ce point à courbures opposées. Enfin, lorsque l'un des centres de courbure principaux est à l'infini, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles. Cette circonstance se présente toujours pour les surfaces développables, puisque les géné-

ratrices de cette surface forment un système de lignes de courbure.

Faisons usage de la courbe indicatrice. Prenons une courbe quelconque sur (S), la normalie correspondante et la droite auxiliaire de cette surface relative au point f_2 (*fig.* 8).

Cette droite auxiliaire doit passer par f_1, puisque les plans focaux sont rectangulaires : soient f_1 c' cette droite et o le pied de la normale G sur (S). Le plan tangent en o à la normalie fait avec le plan tangent

Fig. 8.



en f_2, et par suite avec le plan qui contient le grand axe de l'indicatrice en o, un angle qui est égal à $x f_2 o'$; le plan central de la normalie fait avec le même plan tangent en f_2 l'angle $x f_2 c'$. Le produit des tangentes de ces angles est $\frac{of_2}{oo'} \times \frac{oo'}{of_1}$, c'est-à-dire $\frac{R_2}{R_1}$; mais $\frac{R_2}{R_1} = \frac{b^2}{a^2}$, en appelant a et b les deux axes de l'indicatrice en o. Nous voyons donc que :

Théorème XXVII. — *La tangente en o à la directrice d'une normalie et la trace du plan central de cette surface sur le plan tangent en o sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point.*

La trace du plan central est évidemment parallèle à la perpendiculaire commune aux deux génératrices infiniment voisines G et G_1 de la normalie. Ces deux génératrices étant respectivement perpendiculaires aux plans tangents à (S) menés des pieds o et o_1 de ces droites, cette perpendiculaire est elle-même parallèle à l'intersection de ces deux plans tangents. Nous voyons alors, d'après le théorème précédent, que :

Théorème XXVIII. — *La droite d'intersection du plan tangent en o et du plan tangent infiniment voisin en o_1 est conjuguée de oo_1 par rapport à l'indicatrice de la surface en o.*

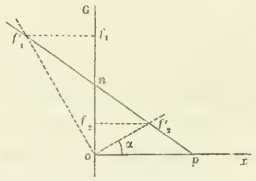
Cette droite d'intersection qui est tangente à (S), et la tangente oo_1 sont deux *tangentes conjuguées* [*]; ces tangentes sont ainsi désignées parce que, si l'on prend les plans tangents en deux points infiniment voisins situés sur l'une de ces tangentes, ces plans se coupent suivant l'autre.

Il résulte de ce théorème que :

Théorème XXIX. — *Lorsqu'une surface développable est circonscrite à une surface quelconque, ses génératrices sont les tangentes conjuguées des tangentes à la courbe de contact.* (Dupin.)

Le rayon de courbure d'une section normale en un point o, qu'on peut obtenir au moyen de l'indicatrice en ce point, se construit très-facilement à l'aide de la droite auxiliaire de la normalie qui a pour directrice cette section. Effectuons cette construction : soient G (*fig.* 9) la normale au point o, et f_1, f_2 les centres de courbure principaux sur G.

Fig. 9.



Menons du point o la droite of'_2 faisant avec ox l'angle α que le plan de la section normale fait avec le plan de la section principale qui contient le grand axe de l'indicatrice. Ce dernier plan est tangent en f_2. La droite auxiliaire relative au point o de la normalie que nous considérons passe donc par f'_2.

Comme le plan tangent en f_1 est perpendiculaire au plan tangent en f_2, elle passera aussi au point de rencontre des perpendiculaires $f_1 f'_1$, of'_1 à G et à of'_2. Cette droite est donc $f'_1 f'_2$ et, d'après le théorème XXIII, le point n où elle rencontre G est le centre de courbure cherché.

A partir du point o sur (S) traçons des courbes quelconques et

[*] Dupin : *Développements de Géométrie.*

prenons ces courbes pour directrices de normalies. Ces surfaces ont, sur un même plan, pour droites auxiliaires relatives au point o, des droites telles que la portion interceptée sur chacune d'elles, par les perpendiculaires à G menées des centres de courbure principaux, est vue du point o sous un angle droit.

Ces droites enveloppent donc une conique ayant pour foyer le point o et la droite G pour l'un de ses axes.

Lorsqu'il s'agit d'un pinceau quelconque et non plus d'un pinceau de normales, l'enveloppe des droites auxiliaires des surfaces élémentaires relatives à un même point o du rayon G est toujours une conique ayant pour foyer le point o et pour l'un de ses axes la droite qui va du point o au centre de la circonférence C, car les droites auxiliaires sont les perpendiculaires élevées des points de C aux lignes qui joignent ces points au point o.

La conique enveloppe des droites auxiliaires pour les normalies qui composent un pinceau de normales est une hyperbole pour les surfaces convexes, une ellipse pour les surfaces à courbures opposées et une parabole pour les surfaces développables.

Lorsque cette conique est une ellipse, on peut mener dans ce cas, et dans ce cas seulement, deux tangentes à cette courbe parallèlement à G. Ces tangentes sont deux droites auxiliaires qui rencontrent G à l'infini.

Nous voyons donc que, pour les surfaces à courbures opposées, il existe, à partir d'un point o, deux directrices telles que les plans normaux qui les contiennent donnent lieu à des sections dont le rayon de courbure est infini.

En nous reportant à ce que nous avons dit de l'indicatrice, ces directions sont celles des asymptotes de l'indicatrice en o. Les courbes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes à une asymptote de l'indicatrice ont été appelées par M. Dupin *lignes asymptotiques*. Sur les surfaces gauches, les génératrices sont des lignes asymptotiques.

Reprenons, à partir du point o sur (S), une directrice quelconque et la normalie correspondante. Appelons toujours G la normale en o, et o_1 un point de cette courbe infiniment voisin du point o; considérons le paraboloïde de raccordement à la normalie le long de la normale G, dont l'un des plans directeurs est perpendiculaire à G.

Le plan tangent en o à ce paraboloïde est le plan normal à (S) qui contient o_1; le plan tangent en o_1 est le plan normal qui passe par le pied de la perpendiculaire, abaissée de o_1 sur G. En négligeant la distance de ce point au point o, nous pouvons dire que le plan tangent en o_1 à ce paraboloïde est le plan normal à (S) qui contient le point o.

D'après ce qui précède (p. 120), en appelant ds la distance oo_1 et θ l'angle que font entre eux ces plans tangents, on a

$$\theta = \frac{ds}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin 2\alpha, \tag{19}$$

α étant toujours l'angle que le plan tangent en o à la normalie fait avec le plan de la section principale qui contient le grand axe de l'indicatrice en o.

On a aussi $\theta = \frac{ds}{op}$, op étant toujours l'abscisse à l'origine de la droite auxiliaire de la normalie relative au point o.

L'angle θ, que font entre eux les plans normaux en o et o_1 et qui contiennent ces points, peut être mesuré par l'angle que la normale au point o_1 fait avec le plan normal Goo_1.

L'expression de cet angle, donnée par la formule (19), est due à M. Bertrand, qui en a déduit le théorème suivant :

Théorème XXX. — *Si en un point* A, *pris sur une surface, on mène une normale* AZ, *puis que, par le point* A, *on fasse passer sur la surface deux lignes perpendiculaires sur lesquelles on prenne des longueurs infiniment petites égales* AB, AC, *la normale au point* B *fera, avec le plan* ZAB, *un angle égal à celui que la normale au point* C *fera avec le plan* ZAC; *en outre, les deux normales seront toutes deux dans l'intérieur de l'angle dièdre des plans* ZAB, ZAC, *ou toutes deux en dehors de cet angle* [*].

Nous retrouverons plus loin le même théorème.

On arrive directement à la formule (19) de la manière suivante :

θ étant égal à $\frac{ds}{op}$, calculons op.

On a (*fig.* 9), (p. 140),

$$\text{aire}\, f'_2 o f'_1 = \text{aire}\, pof'_1 - \text{aire}\, pof'_2,$$

[*] *Journal de Mathématiques*, t. IX, 1re série.

ou

$$of'_1 \times of'_2 = op.of'_1 \cos\alpha - op.of'_2 \sin\alpha,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{op} = \frac{\cos\alpha}{of'_2} - \frac{\sin\alpha}{of'_1};$$

mais

$$of'_1 = \frac{R_1}{\cos\alpha}, \quad of'_2 = \frac{R_2}{\sin\alpha};$$

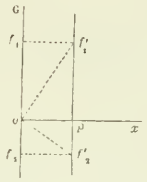
on a donc

$$\frac{1}{op} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R_2} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin 2\alpha,$$

qui donne l'expression déjà trouvée pour δ.

Supposons que la directrice de la normalie sur (S) soit une asympto-

Fig. 10.



tique; la droite auxiliaire relative au point o est parallèle à G, et l'on a (*fig.* 10)

$$op^2 = pf'_1 \times pf'_2 = R_1 R_2;$$

d'où

$$(20) \qquad op = \sqrt{R_1 R_2}.$$

op, dans le cas actuel, est le paramètre de distribution de la normalie. Nous avons donc ce théorème :

Théorème XXXI. — *Le paramètre de distribution des plans tangents à une normalie dont la directrice est une ligne asymptotique est une moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux.* (Ossian Bonnet [*]).

[*] *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, 32e cahier).

Nous voyons aussi (*fig.* 10) que le point o est le point central sur G; par suite :

Théorème XXXII. — *Lorsqu'une ligne asymptotique est directrice d'une normalie, elle est la ligne de striction de cette surface.*

La relation (20), qui existe lorsque la directrice de la normalie est une ligne asymptotique, est applicable à une surface gauche quelconque lorsque l'on prend pour directrice une génératrice même de la surface. Mais, pour une surface gauche, op ou $\frac{oo_1}{\text{tang}X}$ (p. 120) est l'abscisse à l'origine de la droite auxiliaire de cette surface relative au point o.

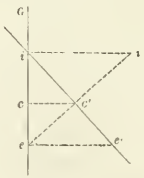
Nous voyons donc :

Théorème XXXIII. — *La droite auxiliaire d'une surface gauche quelconque, relative à un point o d'une génératrice* G *de cette surface, rencontre la perpendiculaire élevée du point o à* G *en un point p, dont la distance à o est moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux de la surface gauche en o.* (De la Gournerie) [*].

D'après cela, on déterminera la moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux en un point e de la génératrice G d'une surface gauche, en construisant la droite auxiliaire relative à ce point et en prenant l'abscisse à l'origine de cette droite.

On joint (*fig.* 11) le point e au point c', qui a été obtenu à l'aide du point central c et du paramètre cc'; la perpendiculaire $c'e'$ à la

Fig. 11.



droite ec' coupe la perpendiculaire ee' à G au point e', extrémité du segment ec' qu'il fallait déterminer. En appelant y la distance ec et k

[*] *Traité de Géométrie descriptive*, 3e partie, p. 44.

le paramètre, on a

$$\frac{ee'}{cc'} = \frac{ec'}{cc'};$$

d'où

$$ee' \quad \text{ou} \quad \sqrt{R_1 R_2} = \frac{y^2 + k^2}{k} \text{ [*]};$$

au point central c, ou simplement k.

Au point i, où le plan tangent en e à la surface gauche est normal à cette surface, le produit des rayons de courbure principaux est égal au carré de ii'; mais $ii' \times ee' = ei^2$; donc :

THÉORÈME XXXIV. — *Aux points e et i, où un plan est tangent et normal à une surface gauche, le produit des rayons de courbure principaux est égal à la quatrième puissance de la distance et qui sépare ces points.*

Sur la *fig.* 10 (p. 143), nous avons trouvé $op = \sqrt{R_1 R_2}$, en considérant une normalie ayant pour directrice une asymptotique de (S); mais, d'après ce que nous venons de dire, op est aussi moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux de la normalie.

Donc :

THÉORÈME XXXV. — *Lorsque la directrice d'une normalie est une ligne asymptotique d'une surface, le produit des rayons de courbure principaux de cette normalie en chaque point de cette directrice est égal au produit analogue pour la surface au même point.*

Prenons pour directrice d'une normalie une *géodésique;* cette courbe a alors en chacun de ses points son plan osculateur normal à (S).

L'abscisse à l'origine de la droite auxiliaire de cette normalie, relative au pied o de la normale G, est égale, comme nous le savons, à $\frac{oo_1}{\tang X}$.

oo_1 est l'arc infiniment petit de la géodésique; X n'est autre que l'angle de deux plans osculateurs de cette courbe, infiniment voisins. $\frac{oo_1}{\tang X}$, dans le cas actuel, représente donc le rayon de seconde courbure de la géodésique.

---

[*] LAMARLE : *Exposé géométrique du calcul différentiel et du calcul intégral*, p. 498.

En appelant r ce rayon, il est égal à op; le rayon de courbure est égal à on. Ces deux rayons (*fig.* 12) sont liés par la relation

$$r = \rho \operatorname{tang} onp = \rho \operatorname{tang} \varphi,$$

φ étant l'angle que le plan central fait avec la directrice de la normalie, c'est-à-dire l'angle de cette directrice avec sa direction conjuguée.

Fig. 12.

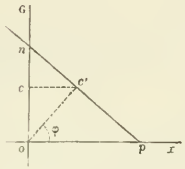
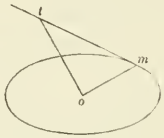


Fig. 13.



Supposons tracée sur le plan tangent en o l'indicatrice en ce point et le rayon vecteur om (*fig.* 13) tangent à la géodésique. L'angle φ que ce rayon fait avec sa direction conjuguée est égal à tmo. On a

$$\rho = \lambda om^2;$$

on a donc

$$om^2 = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{r}{\lambda \operatorname{tang} \varphi},$$

d'où

$$om \times ot = \frac{r}{\lambda}:$$

donc

Théorème XXXVI. — *Le triangle omt rectangle en o, dont le côté om est tangent en o à une géodésique tracée sur* (S), *dont l'hypoténuse mt est tangente en m à l'indicatrice relative au point o, a son aire proportionnelle au rayon de seconde courbure de cette géodésique.*

Si la directrice de la normalie tracée sur (S) est quelconque, on a le théorème suivant :

Théorème XXXVII. — *L'aire du triangle omt, construit comme dans l'énoncé précédent, est proportionnelle à la racine du produit des*

rayons de courbure principaux en o de la normalie qui a pour directrice une courbe tangente en o à om.

Cherchons à interpréter la formule (9), lorsqu'il s'agit de normalies :

Soient toujours o et o_1 deux points infiniment voisins de la directrice d'une normalie à (S). oo_1 est conjugué de la direction de la perpendiculaire commune aux normales G et G_1 à (S), issues des points o et o_1. Projetons (S) sur un plan perpendiculaire à cette dernière direction. Le cylindre projetant touche (S) suivant une courbe qui contient o et o_1, et la ligne de contour apparent de (S) sur notre plan de projection est une section droite de ce cylindre.

Appelons G' et G'_1 les projections des normales G et G_1; ces droites sont des normales, infiniment voisines, du contour apparent de (S) sur le plan de projection : elles se coupent alors au centre de courbure de cette courbe. Mais ce centre de courbure est la projection du point central de la normalie : nous voyons donc que la longueur l est le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S). On voit de même que l_1 et l_2 sont égales aux rayons de courbure principaux de (S).

La formule (9), que nous écrirons $l = R_1 \cos^2 \omega + R_2 \sin^2 \omega$, exprime donc le rayon de courbure du contour apparent d'une surface en fonction des rayons de courbure principaux [*].

On déduit de cette dernière formule le théorème suivant :

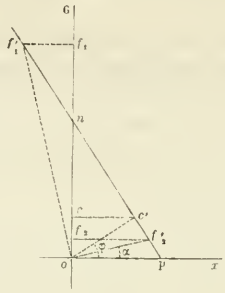
THÉORÈME XXXVIII. — *La somme des rayons de courbure des contours apparents d'une surface sur deux plans rectangulaires entre eux et perpendiculaires à un plan tangent fixe de cette surface est constante, quels que soient les plans rectangulaires sur lesquels on effectue les projections.*

Occupons-nous maintenant de l'angle des deux normales infiniment voisines G et G_1. Désignons toujours par o et o_1 les pieds de ces normales; par c le point central sur G de la normalie à (S), dont oo_1 est la

[*] Je suis déjà arrivé à cette relation dans mon *Mémoire sur la transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure.* (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XI.)

directrice, et par φ l'angle que oo_1 fait avec le plan central ou avec sa direction conjuguée.

Fig. 14.



Appelons dp la plus courte distance de G et G_1, $d\sigma$ l'angle de ces droites, k le paramètre de distribution de la normalie, et y la distance oc, on a (*fig.* 14)

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{k};$$

mais

$$k = \frac{dp}{d\sigma};$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y\,d\sigma}{dp}.$$

oo_1 étant perpendiculaire à G, $dp = oo_1 \cos\varphi$; par suite

$$(21) \qquad d\sigma = \frac{oo_1 \sin\varphi}{y} = \frac{oo_1}{oc'};$$

en remplaçant oo_1 par ds il vient $d\sigma = \frac{ds}{oc'}$ [*].

---

[*] Il résulte de cette formule $d\sigma = \frac{ds}{oc'}$ que, *lorsqu'une droite* G *se déplace en restant normale à la trajectoire d'un de ses points, les arcs parcourus par les différents*

L'expression de $d\sigma$ peut être mise sous la forme connue; on a en effet

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{1}{of_1'^2} + \frac{1}{of_2'^2},$$

ou

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2};$$

par suite

$$(22) \qquad d\sigma = ds\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}}.$$

On a encore

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{1}{on^2} + \frac{1}{op^2},$$

et si la directrice de la normalie est une géodésique dont les deux rayons de courbure sont ρ et r, il vient

$$(23) \qquad d\sigma = ds\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

En rapprochant la formule $d\sigma = \frac{ds}{oc'}$ de celle déjà employée : $d\theta = \frac{ds}{op}$, on voit que

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{oc'}{op} = \cos\varphi;$$

de là la propriété suivante :

Théorème XXXIX. — *L'angle de deux normales à* (S) *issues des points infiniment voisins* o, o_1 *est égal à l'angle des plans normaux qui contiennent ces deux points divisés par le cosinus de l'angle que fait* o, o_1 *avec sa direction conjuguée.*

---

points de cette droite sont entre eux comme les distances de ces points à l'extrémité de la perpendiculaire à G, *menée du point central de la surface engendrée par cette droite, perpendiculaire dont la longueur est celle du paramètre de distribution des plans tangents à cette surface.*

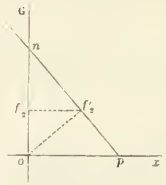
$\frac{d\sigma}{ds}$ ou $\frac{1}{oc'}$ est ce que M. Gilbert appelle la flexion de (S) suivant oo_1 [*]. La relation (22) donne l'expression de la flexion suivant une certaine direction en fonction des valeurs extrêmes de cette flexion.

Si la surface donnée (S) est une surface développable, l'un des rayons de courbure principaux est infini et la droite auxiliaire pour une normale quelconque est alors perpendiculaire à of'_2. On voit donc :

THÉORÈME XL. — *Quelles que soient les courbes tracées à partir d'un point o sur une surface développable, les normalies correspondantes auront pour point central sur la normale en o le centre de courbure principal de la développable.*

L'enveloppe des droites auxiliaires correspondant à toutes ces normalies est, sur un même plan mené par G, une parabole dont le foyer est en o et dont la tangente au sommet est la perpendiculaire $f_2f'_2$ à G. Toutes ces normalies ont même plan central, puisqu'elles ont même plan tangent au point qui est à l'infini sur G. Ce plan central commun est le plan normal à la développable mené par la génératrice qui passe au point o.

FIG. 15.



Si la courbe tracée sur la surface développable est une ligne géodésique, la normalie correspondante est le lieu des normales principales de cette courbe. Mais une courbe gauche quelconque étant toujours

[*] *Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque.* (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XXXVII.)

une géodésique de la développable enveloppe de ces plans rectifiants, il nous suffit pour étudier la surface, lieu des normales principales d'une courbe gauche, de considérer la normalie à une développable ayant pour directrice une géodésique de cette surface.

Si nous nous plaçons dans ce cas (*fig.* 15), *on* est le rayon de première courbure de la géodésique et l'on a pour l'angle de deux normales infiniment voisines de cette courbe $d\sigma = ds\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}$. On voit aussi que l'on obtient le point central f_2 sur une normale G de la courbe gauche en portant *on* égal à ρ sur cette normale, *op* égal à r sur la perpendiculaire élevée du point o à G et en projetant en f_2 sur G le pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur np.

La distance of_2 est égale à

$$\frac{of_2'^2}{on},$$

ou

$$\frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Le paramètre de distribution $f_2 f_2'$ est égal à

$$\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Le plan central fait avec le plan tangent à la normalie en o, c'est-à-dire avec le plan osculateur de la courbe gauche, l'angle pof_2' dont la tangente est égale à $\frac{r}{\rho}$. Mais le plan central, d'après ce que nous venons de dire, contient la génératrice de la développable qui passe en o, et cette droite n'est autre que la droite *rectifiante* de Lancret; nous voyons donc que *la droite rectifiante d'une courbe gauche fait avec cette courbe un angle dont la tangente est* $\frac{r}{\rho}$. Ajoutons, comme il est facile de le voir, *que le produit des rayons de courbure principaux de*

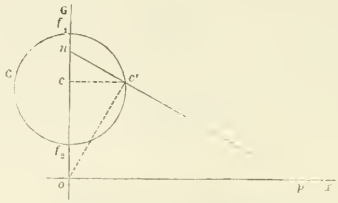
la surface lieu des normales principales d'une courbe gauche au centre de courbure de cette courbe est égale à $\frac{\rho^4}{r^2}$ *et que le produit des rayons de courbure principaux en o et n est* ρ^4 (Théorème XXXIV) [*].

On voit tout de suite sur la figure qu'entre ρ, r, k on a la relation

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{rk}.$$

Avant d'étudier ce qui concerne deux normalies considérées simultanément, je vais rappeler tout ce que la *fig.* 16 contient comme représentation géométrique d'éléments relatifs à la courbure d'une surface.

Fig. 16.



G est la normale au point o à une surface (S), f_1, f_2 sont les centres de courbure principaux de cette surface; la circonférence décrite sur $f_1 f_2$ comme diamètre est caractéristique du pinceau des normales infiniment voisines de G; une normalie, dont le point central est c et le paramètre cc', a pour droite auxiliaire relative au point o la perpendiculaire np menée du point c' à oc'.

n est le centre de courbure de la section déterminée dans (S) par le plan normal à cette surface, mené tangentiellement en o à la directrice de la normalie dont np est la droite auxiliaire.

L'angle de la normale G et de la normale infiniment voisine, qui est une génératrice de cette normalie, est égal à $\frac{ds}{oc'}$.

[*] Catalan : *Recherches sur les surfaces gauches.*

$\frac{1}{oc'}$ représente ce que M. Gilbert a appelé la *flexion* de (S) suivant l'arc ds.

$\frac{ds}{op}$ est l'expression de l'angle que M. Bertrand a considéré le premier et qui n'est autre que l'angle de deux plans normaux de (S) qui passent par deux points infiniment voisins.

Par rapport à la directrice de la normalie : $\frac{1}{op}$ représente ce que M. Picart a appelé la *torsion geodésique* [*].

op est une moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux de (S) en o.

Par rapport à la directrice de la normalie op représente aussi ce que M. de la Gournerie a appelé *paramètre de déviation* [**].

poc' est l'angle de la directrice de la normalie et de sa direction conjuguée.

Si l'on considère la géodésique tangente à la directrice de la normalie, on est le rayon de première courbure de cette courbe et op le rayon de seconde courbure.

Propriétés relatives à des normalies considérées simultanément.

Soient toujours G (*fig.* 17) la normale en o d'une surface (S), f_1 et f_2 les centres de courbure principaux.

Considérons toutes les normalies à (S) qui contiennent G et prenons f_2 pour origine des droites auxiliaires de ces surfaces.

Ces droites auxiliaires passent toutes par f_1. Traçons les deux droites auxiliaires f_1c', f_1e'. Les surfaces correspondantes auront des plans centraux, faisant avec le plan focal en f_2 des angles qui sont xf_2c' xf_2e'; ces plans centraux font donc entre eux l'angle $e'f_2c'$. Nous voyons donc que :

THÉORÈME XLI. — *L'angle, sous lequel on voit d'un point de la circonférence* C *l'arc compris entre les points* c' *et* e', *qui se projettent*

[*] *Essai d'une théorie géométrique des surfaces* (Thèse).

[**] *Traité de géométrie descriptive*, 3e partie.

sur G *aux points centraux de deux normalies, est égal à l'angle que font entre eux les plans centraux de ces surfaces.*

Les plans tangents en o à nos deux normalies font avec le plan focal en f_2 des angles qui sont $f_2c'o$, $f_2e'o$. Par suite ils font entre eux un

Fig. 17.

angle dont la mesure est la moitié de l'arc dg. Cet angle n'est autre que l'angle des directrices des normalies. On voit donc que :

Théorème XLII. — *L'angle des directrices des normalies en o est l'angle sous lequel on voit, d'un point de la circonférence C, l'arc gd compris entre les points où les droites oc', oe', coupent* C.

En joignant le point o de G aux points c', e' on déterminera, comme nous venons de le dire, l'angle que font entre eux les plans tangents aux deux normalies au point o.

Les valeurs extrêmes de cet angle correspondent aux valeurs extrêmes de $e'oc'$, et celles-ci s'obtiennent en prenant, pour sommet des angles tels que $e'oc'$, les points où G est touché par des circonférences passant par les points c' et e'.

La droite e' c' coupe évidemment G au point pour lequel les plans tangents aux normalies font entre eux un angle égal à celui que font entre eux les plans centraux de ces surfaces.

Prenons le point de rencontre u de f_2c' avec f_1 e'. Ce point projeté en t sur G donne le point où le plan central de la normalie dont le point central est e touche la normalie dont le point central est c.

Mais si l'on prolonge $f_2 e'$ jusqu'à sa rencontre avec $f_1 c'$ on obtient le point v qui se projette au même point e puisque les angles $f_1 c' f_2$ et $f_1 e' f_2$ sont droits. Donc :

Théorème XLIII. — *Deux normalies quelconques sont toujours telles que le plan central de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première.*

Considérons la surface parallèle à (S) qui passe par t. Supposons qu'on prenne pour directrices de nos deux normalies les traces de ces surfaces sur cette surface parallèle à (S) : je dis qu'en t ces directrices sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point.

Ceci est évident, si l'on remarque que le plan tangent en t à l'une de ces normalies est le plan central de l'autre (théorème XXVII).

D'après cela, si l'on prend à partir d'un point t la directrice d'une normalie dont la droite auxiliaire est $f_1 c'$ on aura la droite auxiliaire de la normalie dont la directrice est conjuguée de la directrice de la première, en opérant de la manière suivante :

On joint le point f_2 (*fig.* 17) au point v où $f_1 c'$ coupe la perpendiculaire tu à G : cette droite rencontre la circonférence C en un point e' qu'il suffit de joindre à f_1 pour avoir la droite auxiliaire demandée. Nous désignerons sous le nom de *normalies conjuguées* deux normalies ayant pour directrices deux courbes dont les tangentes à leur point de rencontre sont deux tangentes conjuguées.

Reprenons deux normalies quelconques et considérons leurs directrices sur une surface (S) passant au point o (*fig.* 17). Appelons δ l'angle que font en ce point ces deux directrices : cet angle est égal à $de'g$. Appelons γ l'angle que font entre eux les plans centraux des deux normalies : cet angle est égal à $e'dc'$. Dans le triangle ode' on a :

$$\frac{oe'}{od} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta},$$

mais

$$od \times oc' = R_1 R_2,$$

donc

$$(24) \qquad \frac{oe' \times oc'}{R_1 R_2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta},$$

relation entre les flexions d'une surface suivant deux directions arbitraires [*].

Si les normalies sont conjuguées on a simplement $oc' \times oc' = R_1 R_2$, comme on peut le voir directement sur la *fig.* 18.

On peut interpréter de la manière suivante la relation (24).

Nous savons que l'on a

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{oc'},$$

$d\sigma$ étant l'angle des deux normales à la surface (S) menées des extrémités de l'arc ds. On a de même

$$\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{1}{oc'}.$$

La relation (24) peut donc s'écrire :

$$\frac{ds \times ds_1 \sin\delta}{R_1 R_2} = d\sigma \times d\sigma_1 \sin\gamma.$$

Menons une surface parallèle à (S) par le point o' de G (*fig.* 17). Cette surface est rencontrée par les deux normalies suivant deux courbes faisant entre elles un angle δ'. On a, comme précédemment, en employant les mêmes notations avec des accents

$$\frac{ds' \times ds'_1 \sin\delta'}{R'_1 R'_2} = d\sigma \times d\sigma_1 \sin\gamma.$$

Les quantités qui entrent dans le second membre ne changent pas si l'on prend les mêmes normales infiniment voisines de G. On a donc :

$$\frac{ds \times ds_1 \sin\delta}{ds' \times ds'_1 \sin\delta'} = \frac{R_1 R_2}{R'_1 R'_2}.$$

Mais $ds \times ds_1 \sin\delta$ est le double de l'aire du triangle infiniment petit qui a pour côtés ds et ds_1. On voit alors que le rapport des aires des triangles infiniment petits, déterminés par les directrices des deux

[*] Cette relation a été donnée par M. Gilbert (*loc. cit.*).

normalies sur (S) et (S′) est constant, quelles que soient les deux normalies que l'on considère. Si l'on trace autour du point o une courbe infiniment petite, les normales à (S) issues des points de cette courbe détermineront sur (S′) une courbe infiniment petite autour de o', et nous voyons, d'après ce que nous venons de dire, que les aires de ces deux courbes sont entre elles comme les produits des distances des points o et o' aux foyers du rayon G. Ceci s'étend évidemment à un pinceau quelconque; nous pouvons donc dire, en remplaçant (S) et (S′) simplement par des plans perpendiculaires à G, que :

THÉORÈME XLIV. — *Les aires des sections faites dans un pinceau par deux plans perpendiculaires au rayon sont entre elles comme les produits des distances de ces plans aux foyers du rayon.* (KUMMER.)

Voici maintenant quelques propriétés des normalies conjuguées; j'appellerai, avec M. Lamarle, *distance centrale* d'une normalie la distance comprise sur une normale entre le point central et le pied de cette normale. En faisant usage de cette expression, j'énoncerai le théorème suivant :

THÉORÈME XLV. — *Le produit du rayon de courbure de la section normale à* (S) *qui est tangente à la directrice d'une normalie par la distance centrale de la normalie conjuguée est égal au produit des rayons de courbure principaux.* (LAMARLE.)

f_1c' (*fig.* 18) étant la droite auxiliaire d'une normalie, f_1e' est la droite auxiliaire de la normalie conjuguée en o.

Les droites oc', oe' étant également inclinées sur f_1f_2, les triangles rectangles onc', $oe'e$ sont semblables; ils donnent :

$$\frac{on}{oc'} = \frac{oe'}{oe},$$

d'où

$$on \times oe = oc' \times oe' = R_1R_2.$$

Donc

$$on \times oe = R_1R_2,$$

ce qui exprime le théorème à démontrer [*].

[*] La démonstration de ce théorème, à l'aide de l'indicatrice, est très-simple aussi, si l'on se reporte à la remarque qui a permis d'interpréter géométriquement la relation (9).

Joignons le point c' au point e'; appelons t le point de rencontre de cette droite avec G; les points $c\,o\,e\,t$ forment une division harmonique; on a alors

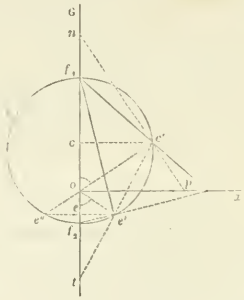
$$\frac{2}{ot} = \frac{1}{oc} + \frac{1}{oe}.$$

Mais le point t est fixe quelle que soit la direction de $f_1 c'$. Donc :

Théorème XLVI. — *La somme des inverses des distances centrales de deux normalies conjuguées autour d'un même point est constante.*

(Joachimsthal [*].)

Fig. 18.



On voit tout de suite sur la *fig.* 18 l'exactitude du théorème suivant :

Théorème XLVII. — *Les paramètres de distribution de deux normalies conjuguées sont entre eux comme les distances centrales de ces normalies, et leurs carrés sont entre eux comme les produits des rayons de courbure principaux de ces surfaces au point o.*

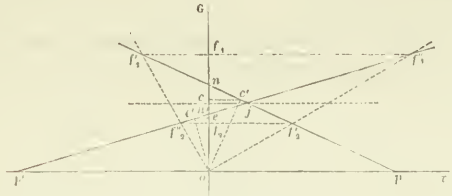
Au lieu de prendre des droites auxiliaires relatives au point f_2, on peut prendre pour origine le point o lui-même. On trouve alors que les droites auxiliaires qui correspondent à deux normalies conjuguées sont également inclinées sur G.

Prenons (*fig.* 19) le point o pour origine afin d'étudier deux normalies rectangulaires en ce point.

[*] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XIII.

Soient toujours f_1, f_2 les centres de courbure principaux de (S) sur G. Le plan tangent en o fait avec le plan tangent f_1, pour l'une des normalies, l'angle xof_1' ; le plan tangent en o, pour l'autre normalie, fait alors, avec le même plan tangent en f_1, l'angle xof_1'' : les droites of_1 et of_1'' étant perpendiculaires entre elles, puisque les normalies sont rectangulaires.

Fig. 19.



Les droites auxiliaires des deux normalies rectangulaires sont donc $f_1'f_2'$, $f_1''f_2''$.

On voit tout de suite sur la figure que

$$\frac{1}{on} + \frac{1}{on'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Donc :

Théorème XLVIII. — *En un point o d'une surface, deux sections normales perpendiculaires entre elles ont la somme de leur courbure constante.*

On voit aussi que $op = op'$. Cette relation donne le théorème de M. Bertrand, page 142, ainsi que le théorème suivant :

Théorème XLIX. — *Pour deux normalies rectangulaires en o, le produit des rayons de courbure principaux de ces surfaces est le même en ce point.*

En rapprochant ce résultat de celui que nous avons obtenu au théorème XXXV, nous voyons qu'on peut dire :

Théorème L. — *Les lignes asymptotiques d'une surface* (S) *et leurs trajectoires orthogonales sont les directrices de normalies ayant en chaque point de* (S) *le produit de leurs rayons de courbure principaux égal au produit analogue pour* (S).

On peut aussi étudier les normalies rectangulaires en o en prenant (*fig.* 20) le point f_2 pour origine. Pour obtenir alors les droites auxiliaires de deux normalies rectangulaires, on mène un diamètre de C; on joint les extrémités de ce diamètre au point o; ces droites coupent C aux points c', c'; enfin on joint ces deux points au point f_1.

On obtient les droites auxiliaires de deux normalies dont les plans centraux sont rectangulaires, en joignant f_1 aux extrémités d'un diamètre de C. Les tangentes en o aux directrices de ces normalies sont les lignes allant de ce point aux points de contact avec l'indicatrice en o de deux tangentes rectangulaires entre elles.

Fig. 20.

Si l'on marche dans deux directions ainsi déterminées, on voit tout de suite, sur la *fig.* 20, que *la somme des inverses des carrés des flexions de* (S) *est constante.*

Je n'énumérerai pas un plus grand nombre de propriétés des normalies; celles que j'ai fait connaître montrent assez avec quelle facilité ces propriétés découlent de la considération de la circonférence caractéristique d'un pinceau de normales. Un tel pinceau est déterminé, lorsqu'on connaît les normales élevées des foyers aux surfaces focales; ces deux droites suffisent donc pour déterminer géométriquement tous les éléments relatifs à la courbure d'une surface; elles tiennent lieu de l'*indicatrice* de M. Dupin.

Nous ne doutons pas qu'en leur adjoignant de nouvelles droites on n'arrive à la représentation d'éléments d'ordre supérieur.

NOTE.

Je vais démontrer le théorème sur lequel je m'appuie page 121 afin de mettre sous les yeux du lecteur tout ce qu'il lui est nécessaire de connaître pour suivre mon exposition et pour lui permettre de bien voir que ma théorie géométrique de la courbure des surfaces a pour base des propriétés tout à fait élémentaires.

Considérons le segment ab d'une droite D; assujettissons les points a et b à parcourir deux courbes données (a), (b). Le déplacement de a b est ainsi bien défini; lorsqu'on considère seulement le déplacement infiniment petit, on sait qu'il peut être obtenu, et cela est très-facile à voir, au moyen d'une rotation autour de la droite Δ intersection des plans normaux à (a), (b) qui sont menés des points a et b.

Un point c quelconque de D décrit pendant le déplacement de cette droite une trajectoire dont le plan normal passe Δ. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème LI. — *Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite D se coupent suivant une même droite* Δ.

Δ est la droite *conjuguée* de D; nous verrons tout à l'heure pourquoi M. Chasles a ainsi désigné cette droite [*]. Considérons maintenant une droite D et quatre points a, b, c, e sur cette droite; supposons que l'on déplace la droite D de façon que les points a, b, c, e restent sur quatre surfaces directrices (A), (B), (C), (E). D engendrera alors une surface réglée; pour un déplacement infiniment petit elle aura une certaine conjuguée Δ. Cette droite, d'après le théorème précédent, doit rencontrer les normales A, B, C, E aux quatre surfaces directrices qui sont issues des points a, b, c, e; elle est donc déterminée. Au moyen de Δ on a tout de suite la tangente à la trajectoire d'un point quelconque de D.

Si nous prenons trois points, a, b, c sur D, lorsque l'on assujettira

[*] *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.* (*Comptes rendus*, 1843.)

ces trois points à rester sur les trois surfaces (A) (B) (C), cette droite D pourra, à partir de la position qu'elle occupe, décrire une infinité de surfaces réglées.

Les trajectoires d'un point i de D pour tous les déplacements qu'on peut donner à cette droite appartiennent à la surface trajectoire (I) du point i. La normale I menée du point i à cette surface est normale à toutes les trajectoires du point i; elle doit donc rencontrer toutes les conjuguées de D relatives à tous les déplacements de cette droite. Mais ces conjuguées sont les lignes qui rencontrent les trois normales A, B, C et qui forment alors un hyperboloïde, la droite I qui les rencontre toutes est la génératrice de cet hyperboloïde qui passe par le point i.

Nous avons ainsi démontré ce théorème déjà énoncé :

Théorème LII. — *Les normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite appartiennent à un hyperboloïde.*

Je retrouverai tout à l'heure une autre démonstration de ce même théorème lorsque j'aurai établi le théorème relatif aux normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une figure de forme invariable.

Pour arriver à ce théorème, on établit d'abord ce lemme bien simple:

Théorème LIII. — *Lorsqu'une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, elle est normale aux trajectoires de tous ses points.*

De ce lemme résultent les propriétés suivantes :

Théorème LIV. — *Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'un plan passent par un même point de ce plan.*

Considérons en effet un plan (P) dont le déplacement est défini ainsi : a, point de ce plan, décrit une trajectoire (a); b, autre point du plan (P), décrit une trajectoire (b); enfin un troisième point (c) se déplace sur une surface (C). Les plans normaux en a et b ont pour traces sur (P) des droites qui se coupent en f. Chacune des droites af, bf, étant normales à la trajectoire d'un de leurs points, jouit, en vertu du théorème précédent, de la même propriété pour tous ses points, le point f, qui appartient à chacune d'elles, décrit donc un

élément perpendiculaire à chacune de ces droites et par suite perpendiculaire au plan (P). En traçant du point f une droite quelconque sur le plan (P), on aura une droite à laquelle on pourra appliquer le lemme précédent et qui est alors la trace sur le plan (P) du plan normal relatif à la trajectoire d'un quelconque de ses points.

Le point f est donc le point de rencontre des plans normaux aux trajectoires de tous les points du plan (P). M. Chasles lui a donné le nom de *foyer* du plan (P).

Les plans normaux relatifs aux trajectoires des points a et b se coupent, d'après ce que nous savons, suivant la conjuguée Δ de la droite D qui contient ces deux points. Δ a pour trace le point f sur le plan (P). Si l'on imagine un autre plan passant par D et invariablement lié au plan (P), le foyer de ce plan sera aussi sur Δ; donc :

Théorème LV. — *Quand des plans passent par une même droite* D, *leurs foyers sont sur la conjuguée de cette droite.*

Nous pouvons énoncer autrement ce résultat, et dire :

Théorème LVI. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, si l'on considère parmi toutes les normales aux trajectoires des points entraînés, celle qui rencontre une droite* D, *toutes ces droites rencontrent en outre une deuxième droite* Δ, *conjuguée de la première.*

Le théorème LV peut nous conduire à une autre conséquence; les plans passant par D sont respectivement normaux aux trajectoires de leurs foyers, mais ces foyers appartiennent à la droite Δ; nous voyons donc que les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite passent par la droite D. Les droites D et Δ sont donc telles que les plans normaux aux trajectoires des points de l'une passent par l'autre. C'est en raison de cette dernière propriété que M. Chasles a désigné ces droites sous le nom de *droites conjuguées*.

Ces deux droites sont aussi deux axes de rotation : nous avons déjà vu que c'était autour de Δ qu'il fallait faire tourner D pour lui imprimer un déplacement infiniment petit. D'après ce que nous venons de dire, c'est autour de D qu'il faut de même faire tourner Δ.

Le déplacement d'un plan (P), défini comme précédemment, est assu-

jetti à cinq conditions; mais comme le déplacement le plus général d'un plan entraîne celui d'une figure de forme invariable qui lui est liée, nous pouvons dire aussi qu'il faut cinq conditions pour définir le déplacement d'une pareille figure.

Si l'on n'assujettit une figure de forme invariable qu'à quatre conditions, elle pourra, à partir de la position qu'elle occupe, être déplacée d'une infinité de manières.

Pour chacun de ces déplacements, les points décrivent des lignes trajectoires; tous ces éléments de lignes appartiennent aux surfaces trajectoires des points de la figure.

Je dis que si, à un instant quelconque, on mène les normales aux surfaces trajectoires des points de la figure mobile, toutes ces normales rencontreront les deux mêmes droites.

Soient a, b, c, e quatre points de la figure mobile; assujettissons ces points à se déplacer sur quatre surfaces (A), (B), (C), (E). Menons les normales A, B, C, E à ces surfaces, issues des points a, b, c, e. Menons les deux droites D et Δ rencontrant à la fois ces quatre normales. Quel que soit le déplacement de la figure, les droites A, B, C, E sont des normales aux trajectoires des points a, b, c, e qui s'appuient sur une droite D; en vertu du théorème LVI elles rencontrent la conjuguée de D. Δ est donc cette conjuguée.

Les droites conjuguées D et Δ sont en outre deux axes de rotation à l'aide desquels on peut imprimer à la figure tous les déplacements compatibles avec les données.

Pour un point quelconque i de la figure mobile, la normale à la surface trajectoire de ce point est la droite partant du point i qui rencontre D et Δ. Cette droite est, en effet, normale aux trajectoires de ce point pour tous les déplacements qu'on peut imprimer à la figure.

Nous avons donc le théorème XXVIII dont je reproduis ici l'énoncé.

Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace de manière que quatre de ses points restent sur quatre surfaces données, à un instant quelconque, les normales, issues respectivement des points de la figure, aux surfaces trajectoires de ces points, rencontrent deux mêmes droites.

Si en particulier on prend les points d'une droite G les normales aux surfaces trajectoires de ses points rencontrant G, D et Δ appar-

tiennent à un hyperboloïde. Nous retrouvons ainsi une propriété déjà démontrée.

Cette droite G engendre un pinceau; les perpendiculaires à cette droite et qui rencontrent D et Δ sont les normales aux surfaces focales issues des foyers du rayon G. La connaissance des droites D, Δ entraîne donc celle de ces normales, et par suite D, Δ définissent le pinceau. Elles le définissent plus complétement que ne le font les normales aux surfaces focales, car, connaissant ces droites D, Δ on peut déterminer les normales aux surfaces trajectoires des points du rayon G et le rapport des aires infiniment petites déterminées simultanément par le pinceau sur ces surfaces trajectoires.

La droite G peut être considérée comme appartenant à une infinité de figures de forme invariable; entraînée successivement avec chacune de ces figures, elle peut décrire le même pinceau, mais les surfaces trajectoires de ces points varieront.

Dans tous les cas, on aura les mêmes foyers et les mêmes normales aux surfaces focales; les droites D, Δ relatives à chacune des figures de forme invariable, dont on suppose que G fait partie, sont toujours deux droites rencontrant les deux normales aux surfaces focales. Si l'on prend une droite partant de f_1 et rencontrant la normale F_2 à la surface focale, et une droite partant de f_2 et rencontrant F_1, on a tout de suite, en employant ces deux droites comme axes de rotation, le théorème XLIV : les *aires des sections faites dans un pinceau par des plans perpendiculaires aux rayons sont proportionnelles aux produits des distances de ces plans aux foyers du rayon.*

Les principales propriétés d'un pinceau pourraient être obtenues en considérant le rayon du pinceau se déplaçant autour de deux droites rencontrant les normales aux surfaces focales issues des foyers de ce rayon; mais ce procédé est loin de donner des démonstrations aussi simples que celui que j'ai fait connaître dans ce Mémoire.

On peut, inversement, de ces propriétés déduire des propriétés de certaines surfaces réglées ayant deux directrices rectilignes. Par exemple, pour un hyperboloïde, le théorème VII conduit à celui-ci :

Théorème LVII. — *Dans un hyperboloïde à une nappe les pieds des perpendiculaires communes à une génératrice* G *et autres génératrices du même système considérées successivement, occupent un segment*

de G; *les extrémités de ce segment sont à égale distance du centre de l'hyperboloïde, etc.*

Je ne donnerai pas plus de développement à cette Note, qui n'avait pour but que la démonstration des théorèmes LII et XXVIII, théorèmes qui se trouvent déjà avec de nombreuses conséquences dans le Mémoire intitulé : *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable*, inséré dans le tome XX du *Recueil des Savants étrangers*, et dans le XLIIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Sur les lois qui régissent, à une première approximation, les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 8 janvier 1872.)

D'après la *Théorie des ondes lumineuses* qui se trouve résumée dans un article des *Comptes rendus* (t. LXV, p. 235, 5 août 1867), et développée dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques* (t. XIII, 1868), les trois équations du mouvement de l'éther dans un corps transparent sont

$$(1)\quad \rho\frac{d^2u}{dt^2}+\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}=(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u,\quad \rho\frac{d^2v}{dt^2}+\ldots,\quad \rho\frac{d^2w}{dt^2}+\ldots:$$

λ, μ et ρ désignent les deux coefficients d'élasticité (*Leçons de Lamé*) et la densité de l'éther (supposé par cette théorie le même dans les corps que dans les espaces célestes); x, y, z les trois coordonnées d'équilibre d'une molécule d'éther par rapport à un système quelconque d'axes rectangulaires fixes; u, v, w les déplacements de cette molécule à l'époque t; θ la dilatation cubique $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$, et Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$; enfin, ρ_1 la densité de la matière pondérable, et u_1, v_1, w_1 ses trois déplacements très-petits, donnés à une première approximation, avec neuf coefficients constants $\alpha,\ldots,\zeta_1$ par les formules

$$(2)\quad u_1=\alpha u+\zeta_1 v+\varepsilon w,\quad v_1=\beta v+\delta_1 w+\zeta u,\quad w_1=\gamma w+\varepsilon_1 u+\delta v.$$

Les trois coefficients α, β, γ sont positifs; car si l'on a, par exemple, $v = w = 0$, $u > 0$, l'éther, se mouvant dans le sens des x positifs, ne peut pas pousser la matière pondérable vers les x négatifs, et l'on doit avoir $u_1 > 0$.

Effectuons une transformation de coordonnées, en prenant de nouveaux axes rectangulaires des x', y', z' qui fassent avec les premiers des angles ayant les cosinus a, b, c pour celui des x'; a', b', c' pour celui des y'; a'', b'', c'' pour celui des z'. Les formules ordinaires de transformation et les relations (2) permettront d'obtenir les déplacements u'_1, v'_1, w'_1 de la matière pondérable par rapport aux nouveaux axes, en fonction de u_1, v_1, w_1, puis de u, v, w, et enfin en fonction des déplacements u', v', w' de l'éther suivant les nouveaux axes. On aura ainsi, entre u'_1, v'_1, w'_1 et u', v', w', des relations pareilles à (2), mais avec neuf nouveaux coefficients α',..., ζ'_1, ayant pour valeurs

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + (\delta + \delta_1)\, bc + (\varepsilon + \varepsilon_1)\, ca + (\zeta + \zeta_1)\, ab,\\
\delta' &= \alpha a'a'' + \beta b'b'' + \gamma c'c'' + \delta b'c'' + \delta_1 c'b'' + \varepsilon c'a'' + \varepsilon_1 a'c''\\
&\quad + \zeta a'b'' + \zeta_1 b'a'',\\
\delta'_1 &= \alpha a'a'' + \beta b'b'' + \gamma c'c'' + \delta_1 b'c'' + \delta c'b'' + \varepsilon_1 c'a'' + \varepsilon a'c''\\
&\quad + \zeta_1 a'b'' + \zeta b'a'',\\
\beta' &= \alpha a'^2 + \ldots, \quad \varepsilon' = \alpha a''a + \ldots, \quad \varepsilon'_1 = \alpha a''a + \ldots,\\
\gamma' &= \alpha a''^2 + \ldots, \quad \zeta' = \alpha aa' + \ldots, \quad \zeta'_1 = \alpha aa' + \ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on forme en particulier les trois sommes $\delta' + \delta'_1$, $\varepsilon' + \varepsilon'_1$, $\zeta' + \zeta'_1$, on trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta' + \delta'_1 &= 2(\alpha a'a'' + \beta b'b'' + \gamma c'c'') + (\delta + \delta_1)(b'c'' + c'b'')\\
&\quad + (\varepsilon + \varepsilon_1)(c'a'' + a'c'') + (\zeta + \zeta_1)(a'b'' + b'a''), \quad \varepsilon' + \varepsilon'_1 = \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Or, en effectuant la même transformation de coordonnées sur l'ellipsoïde

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + (\delta + \delta_1)\, yz + (\varepsilon + \varepsilon_1)\, zx + (\zeta + \zeta_1)\, xy = 1,$$

on obtient précisément ces sommes pour coefficients respectifs de

$y'z'$, $z'x'$, $x'y'$, de telle sorte que, si l'on choisit pour nouveaux axes ceux de l'ellipsoïde, on aura $\delta' + \delta'_1 = 0$, $\varepsilon' + \varepsilon'_1 = 0$, $\zeta' + \zeta'_1 = 0$. Il existe donc un système d'axes rectangulaires par rapport auquel on a

$$\delta'_1 = -\delta', \quad \varepsilon'_1 = -\varepsilon', \quad \zeta'_1 = -\zeta';$$

ce qui, en effaçant les accents, réduit les formules (2) à

$$(4) \quad u_1 = \alpha u - \zeta v + \varepsilon w, \quad v_1 = \beta v - \delta w + \zeta u, \quad w_1 = \gamma w - \varepsilon u + \delta v.$$

Étudions la propagation d'ondes planes perpendiculaires à la direction qui fait avec ces axes des angles ayant pour cosinus m, n, p. Si τ désigne la durée de la vibration, ω la vitesse de propagation, m', n', p' les cosinus des angles de la vibration avec les axes, enfin I et ψ deux constantes, on aura

$$(5) \qquad \frac{u}{m'} = \frac{v}{n'} = \frac{w}{p'} = \mathrm{I}\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} - \psi\right).$$

Ces valeurs de u, v, w, portées dans (4) et (1), donnent les trois équations

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{U}m' + \rho_1\omega^2(\zeta n' - \varepsilon p')}{m} &= \frac{\mathrm{V}n' + \rho_1\omega^2(\delta p' - \zeta m')}{n} \\ &= \frac{\mathrm{W}p' + \rho_1\omega^2(\varepsilon m' - \delta n')}{p} = -(\lambda + \mu)\mathrm{S}mm', \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles je désigne par le symbole S la somme de trois termes analogues dont le premier est écrit après ce signe, et où j'ai fait, pour abréger,

$$(7) \quad \mathrm{U} = \mu - (\rho + \rho_1\alpha)\omega^2, \quad \mathrm{V} = \mu - (\rho + \rho_1\beta)\omega^2, \quad \mathrm{W} = \mu - (\rho + \rho_1\gamma)\omega^2.$$

Des deux premières (6) on déduit que m', n', p' sont respectivement proportionnels aux trois expressions

$$(8) \quad m\mathrm{VW} + \rho_1^2\omega^4(\mathrm{S}m\delta)\delta - \rho_1\omega^2(n\zeta\mathrm{W} - p\varepsilon\mathrm{V}), \quad n\mathrm{WU} + \ldots, \quad p\mathrm{UV} + \ldots,$$

qui, substituées à m', n', p' dans ces relations (6), les changent en la relation unique

$$(9) \quad (\lambda + \mu)[\mathrm{S}m^2\mathrm{VW} + \rho_1^2\omega^4(\mathrm{S}m\delta)^2] + [\mathrm{UVW} + \rho_1^2\omega^4\mathrm{S}\mathrm{U}\delta^2] = 0.$$

Celle-ci, en y mettant au lieu de U, V, W leurs valeurs (7), devient l'équation aux vitesses de propagation, équation du troisième degré en ω^2.

Tous les corps transparents connus sont peu hétérotropes au point de vue optique, c'est-à-dire que les cinq quantités $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, δ, ε, ζ sont très-petites. Si elles étaient nulles, ce qui donnerait $U=V=W$, l'équation (9), réduite à $(\lambda+\mu+U)U^2=0$, aurait deux racines égales et positives, obtenues en faisant $U=0$ et correspondant, comme on sait, à des vibrations transversales ou lumineuses : les mêmes cinq quantités étant en général très-petites, ces deux racines sont légèrement inégales, peu différentes de la valeur qu'elles ont dans le cas de l'isotropie, et correspondent à des vibrations quasi transversales. Lorsqu'on se borne à l'étude de ces vibrations, on peut, dans les expressions (8) et dans l'équation (9), ne conserver que les quantités du second ordre par rapport à U, V, W, δ, ε, ζ. En divisant en outre par le produit des trois facteurs $\rho+\rho_1\alpha$, $\rho+\rho_1\beta$, $\rho+\rho_1\gamma$, et appelant A^2, B^2, C^2, k^2 les rapports respectifs de μ à ces trois facteurs presque égaux et le quotient sensiblement constant de $\rho_1\omega^2$ par l'un d'eux, il vient ainsi, à fort peu près : 1° au lieu des expressions (8) auxquelles les cosinus m', n', p' sont proportionnels, celles-ci

$$(10)\quad m(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2)+k^4(Sm\delta)\delta+k^2[n\zeta(\omega^2-C^2)-p\varepsilon(\omega^2-B^2)],\ldots;$$

2° au lieu de (9), l'équation bien plus simple

$$(11)\qquad Sm^2(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2)+k^4(Sm\delta)^2=0.$$

Les trois expressions approchées (10), respectivement multipliées par m, n, p et ajoutées, donnent, d'après (11), une somme nulle : les simplifications introduites, en altérant légèrement les rapports de m', n', p' et la valeur de ω, ont donc eu pour résultat de faire $Smm'=0$, c'est-à-dire de rendre les vibrations rigoureusement transversales. La vraie valeur du petit angle, Smm', que fait la vibration avec le plan de l'onde, s'obtiendra en ajoutant terme à terme les trois rapports égaux (6), après avoir respectivement multiplié leurs numérateurs et leurs dénominateurs par m, n, p, puis en égalant le résultat au dernier

membre de (6) : si l'on appelle K^2 une constante peu différente de A^2, B^2, C^2, par exemple leur moyenne, il viendra sensiblement

$$(12)\qquad S\,mm' = -\frac{\mu}{(\lambda+\mu)K^2}\left[S(A^2-K^2)mm' + k^2 S m(\zeta n' - \varepsilon p')\right],$$

relation dans le second membre de laquelle les cosinus m', n', p' pourront être remplacés par leurs valeurs approchées tirées de (10) et (11).

Lorsque les coefficients δ, ε, ζ sont nuls, le milieu est optiquement symétrique par rapport aux plans coordonnés, c'est-à-dire tel qu'on peut changer en son opposé le sens d'un quelconque des axes, sans modifier les expressions (4) de u_1, v_1, w_1. Alors les formules (10) et (11) sont identiques à celles de Fresnel et contiennent les lois expérimentales connues de la double réfraction [*]

Mais revenons au cas général où δ, ε, ζ sont quelconques, et ajoutons les carrés développés des trois expressions (10), après les avoir respectivement multipliés par $\omega^2 - A^2$, $\omega^2 - B^2$, $\omega^2 - C^2$: après quelques réductions, dont la plus difficile consiste dans l'emploi de l'identité

$$\begin{aligned} &S(\omega^2-A^2)\left[n\zeta(\omega^2-C^2) - p\varepsilon(\omega^2-B^2)\right]^2 \\ &\quad = (\omega^2-A^2)(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2)\left[S\frac{m^2}{\omega^2-A^2}S\delta^2(\omega^2-A^2) - (Sm\delta)^2\right], \end{aligned}$$

on trouve un résultat égal au produit de

$$(\omega^2-A^2)(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2) + k^4 S\delta^2(\omega^2-A^2)$$

par le premier membre de (11), et par conséquent nul. Les expressions (10) étant proportionnelles à m', n', p', on peut donc poser la

[*] Dans le même cas d'un milieu symétrique et si l'on a en outre $\lambda + 2\mu = 0$ (hypothèse revenant à supposer nulle la vitesse de propagation, dans l'éther, des ondes longitudinales), l'équation (9) devient rigoureusement celle de Fresnel, et les expressions (8) se réduisent à $mA^2(\omega^2-B^2)(\omega^2-C^2), \ldots$: ces formules sont alors celles que M. Sarrau a étudiées au chapitre IV d'un Mémoire sur la lumière (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868) et desquelles il a déduit la théorie de la double réfraction de Fresnel, mais avec des vibrations quasi transversales perpendiculaires aux rayons lumineux, comme paraît l'exiger un calcul exact de la réflexion cristalline.

relation

$$(13) \qquad S(\omega^2 - A^2)m'^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \omega^2 = SA^2 m'^2.$$

Si l'on porte, à partir de l'origine et dans la direction (m', n', p') de la vibration, une droite égale à l'inverse de la vitesse de propagation ω correspondante, les extrémités (x, y, z) de toutes les lignes pareilles constitueront, d'après (13), l'ellipsoïde, dit *d'élasticité*, $SA^2x^2 = 1$, *ellipsoïde qui ne dépend en rien des coefficients de non-symétrie* δ, ε, ζ. *On pourra donc obtenir le sens des vibrations correspondantes à une onde plane de direction donnée, en calculant, au moyen de l'équation* (11), *les deux vitesses de propagation possibles de cette onde plane, et en choisissant, parmi les demi-diamètres de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan de l'onde* $Smx = 0$, *l'un de ceux dont la longueur sera égale à l'inverse de la vitesse trouvée.* Comme il y a dans une ellipse quatre demi-diamètres égaux, donnant deux directions distinctes également inclinées de part et d'autre des axes, le sens de la vibration ne sera pas ainsi complétement déterminé : cela provient de ce que l'équation aux vitesses (11) ne change pas lorsqu'on y change δ, ε, ζ en $-\delta$, $-\varepsilon$, $-\zeta$, et que, par suite, la même construction doit fournir les deux directions distinctes de la vibration dans deux milieux ne différant que par les signes de δ, ε, ζ. L'indétermination n'existe pas lorsque $Sm\delta = 0$, c'est-à-dire dans les milieux symétriques, et aussi, dans les autres milieux, pour les ondes planes parallèles à la direction $(\delta, \varepsilon, \zeta)$: en effet, l'équation aux vitesses (11) se réduit alors à celle de Fresnel, et l'on sait que les deux valeurs qu'elle donne à l'inverse de ω sont précisément celles du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan de l'onde $Smx = 0$. Mais, en général, le terme positif $k^4(Sm\delta)^2$, qui termine le premier membre de (11), augmente le produit des deux valeurs de ω^2 sans changer leur somme $S(B^2 + C^2)m^2$, de manière à diminuer leur différence : la somme des carrés des inverses des deux demi-diamètres de l'ellipse d'intersection suivant lesquels se font les vibrations est donc égale à celle des carrés des inverses des deux demi-axes de la même ellipse, ce qui, d'après une propriété connue de cette courbe, revient à dire

que *les deux vibrations font, chacune avec l'axe de l'ellipse qui en est le plus voisin, deux angles égaux.*

Pour achever de déterminer géométriquement le sens (m', n', p') des vibrations, supposons que les axes des x, des y, des z, aient été choisis de manière à être respectivement ceux que l'on appelle de *plus grande*, de *moyenne* et de *plus petite élasticité*, c'est-à-dire tels que l'on ait $A^2 > B^2 > C^2$, et supposons en outre que les y positifs soient à droite des x positifs pour un observateur qui aurait les pieds à l'origine, la tête vers les z positifs et qui regarderait l'angle des xy positifs. Construisons, à partir de l'origine, une droite que j'appellerai *axe de non-symétrie* du milieu, d'une longueur ν égale au produit de $\sqrt{S\delta^2}$ par l'un des trois rapports sensiblement égaux $\frac{\rho_1}{\rho+\rho_1\alpha}$, $\frac{\rho_1}{\rho+\rho_1\beta}$, $\frac{\rho_1}{\rho+\rho_1\gamma}$, et prise dans la direction qui fait avec les axes respectifs des x, y, z des angles ayant leurs cosinus dans les mêmes rapports et de mêmes signes que δ, ε, ζ. J'admettrai d'abord que cet axe de non-symétrie coïncide avec celui des y positifs, ou que l'on ait $\delta = \zeta = 0$, $\varepsilon > 0$, et je considérerai des ondes planes presque parallèles au plan des zx. Les cosinus m, p, n' seront donc très-petits, et il suffira de calculer le rapport de p' à m', rapport sensiblement égal à la tangente de l'angle fait par la vibration avec les x positifs. Or la première et la troisième des expressions (10) donneront

$$(14)\qquad \frac{p'}{m'} = \frac{(\omega^2 - A^2)p + k^2\varepsilon m}{(\omega^2 - C^2)m - k^2\varepsilon p} = \frac{k^2\varepsilon}{\omega^2 - C^2},$$

le troisième membre se déduisant du second en vertu de l'équation (11), alors réduite à $(\omega^2 - A^2)(\omega^2 - C^2) = -k^4\varepsilon^2$; d'autre part, la même équation montre que ω^2 est compris entre A^2 et C^2, ou que $\omega^2 - C^2 > 0$. Le rapport de p' à m' est donc > 0, et les vibrations sont comprises dans l'angle des zx positifs ou dans celui des zx négatifs.

Comme l'intersection de l'ellipsoïde $SA^2x^2 = 1$ par le plan des zx a son grand axe suivant les z, il en résulte qu'*un observateur qui aurait les pieds à l'origine, le corps le long de l'axe de non-symétrie, et respectivement à sa gauche et à sa droite, devant lui, un demi-grand axe et un demi-petit axe de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan de l'onde, verrait les vibrations se faire dans l'angle com-*

pris entre ces deux demi-axes. Concevons actuellement que l'axe de non-symétrie conserve la même longueur, mais tourne autour de l'origine d'une manière quelconque, en évitant seulement les quatre positions où il serait normal aux sections circulaires de l'ellipsoïde d'élasticité : il est évident, vu l'impossibilité d'un changement brusque de la direction (m', n', p'), que les vibrations se feront toujours, sur l'onde plane normale à cet axe, de la même manière par rapport au même observateur, et que la même loi continuera encore à s'observer si l'on passe, de cette onde plane, à d'autres faisant avec l'axe de non-symétrie des angles de plus en plus petits, jusqu'à ce qu'on arrive aux ondes parallèles à cet axe et pour lesquelles l'action de la non-symétrie s'annule.

Observons que, si φ désigne l'angle fait par la normale à l'onde avec l'axe de non-symétrie ν, on aura identiquement $k^2 S m\delta = \omega^2 \nu \cos\varphi$ et par suite, à fort peu près, $k^4 (S m\delta)^2 = (S B^2 C^2 m^2)\nu^2 \cos^2\varphi$. L'équation (11) développée pourra donc s'écrire

$$(15) \qquad \omega^4 - \omega^2 S(B^2 + C^2) m^2 + (S B^2 C^2 m^2)(1 + \nu^2 \cos^2\varphi) = 0.$$

D'après celle-ci, la somme des carrés des deux valeurs de ω^2 est $S(B^2 + C^2)m^2$, expression indépendante de ν, et le produit des mêmes carrés est $(S B^2 C^2 m^2)(1 + \nu^2 \cos^2\varphi)$, c'est-à-dire égal à sa valeur dans le cas d'un milieu symétrique augmentée dans le rapport de 1 à 1 + le carré de la projection de l'axe de non-symétrie sur la normale aux ondes.

En résumé, *quand on fait abstraction des pouvoirs dispersif et rotatoire, la constitution optique d'un milieu transparent est géométriquement définie au moyen d'un ellipsoïde, dit d'élasticité, et d'une droite de longueur donnée, ou axe de non-symétrie, que l'on doit concevoir menée, à partir du centre de l'ellipsoïde, dans une direction donnée également. Le milieu peut propager, parallèlement à un plan diamétral quelconque de l'ellipsoïde, deux systèmes d'ondes planes à vibrations quasi transversales. La direction des vibrations et la vitesse de propagation s'obtiennent : 1° en concevant un observateur qui, ayant les pieds au centre de l'ellipsoïde et le corps le long de l'axe de non-symétrie, se tournerait toujours de manière à voir respectivement*

devant lui, à sa gauche et à sa droite, un demi-grand axe et un demi-petit axe de l'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan diamétral considéré, et 2° en traçant, entre ces deux demi-axes et dans la même ellipse d'intersection, les deux demi-diamètres dont les carrés des inverses ont même somme que les carrés des inverses des deux demi-axes, et ont pour produit le produit des carrés des inverses des deux mêmes demi-axes, multiplié par la somme de l'unité et du carré de la projection de l'axe de non-symétrie du milieu sur la normale aux ondes. Chacun des deux demi-diamètres ainsi construits donne, à fort peu près, par sa direction, l'orientation des vibrations correspondantes à l'un des deux systèmes d'ondes planes, et, par sa grandeur, l'inverse de la vitesse de propagation du même système d'ondes.

La transparence du milieu pour les ondes planes propagées dans toutes les directions exige que les deux racines de (11) soient réelles, quels que soient m, n, p, sans quoi on n'aurait des valeurs réelles de u, v, w qu'en introduisant dans le dernier membre de (5) une exponentielle affectée d'un coefficient d'extinction. Pour résoudre l'équation (11), supposons toujours $A^2 > B^2 > C^2$, faisons

$$A^2 - B^2 = (A^2 - C^2)\cos^2\theta', \quad B^2 - C^2 = (A^2 - C^2)\sin^2\theta',$$

et appelons U′, U″ les deux angles que fait la normale à l'onde avec les deux droites situées dans le plan des zx et inclinées de θ' sur les x positifs. On aura, comme on voit d'ailleurs dans les traités de double réfraction, $\cos U' = m\cos\theta' + p\sin\theta'$, $\cos U'' = m\cos\theta' - p\sin\theta'$, d'où résulteront, pour m, p, et par suite pour $n^2 = 1 - p^2 - m^2$, des expressions en fonction de U′, U″ qui changeront (11) en

$$(15\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} 2\delta^2 = {} & (A^2 + C^2) - (A^2 - C^2)\cos U'\cos U'' \\ & \pm\sqrt{(A^2 - C^2)^2\sin^2 U'\sin^2 U'' - 4k^4(S m\delta)^2}. \end{aligned}\right.$$

Pour $m = \cos\theta'$, $n = 0$, $p = \pm\sin\theta'$ (et, par suite, U′ ou U″ $= 0$), la condition de réalité exige qu'on ait $S m\delta = 0$, ou $\delta = \zeta = 0$: *l'axe de non-symétrie doit donc coïncider avec celui de moyenne élasticité.* La quantité sous le radical de (15 *bis*) devient alors identiquement

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & (A^2 - C^2)^2(\cos 2\theta' - \cos U'\cos U'')^2 \\ & \quad + [(A^2 - C^2)^2\sin^2 2\theta' - 4k^4\varepsilon^2]\,n^2, \end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle on peut, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, remplacer $\cos 2\theta' - \cos U' \cos U''$ par $\sin U' \sin U'' \cos V'$, V' désignant le dièdre formé par les deux plans des angles U' et U''. Quand V' est droit, cette expression se réduit à son second terme, et n'est positive qu'autant que l'on a

$$(17) \qquad 2k^2\varepsilon < (A^2 - C^2)\sin 2\theta' \text{ (en valeur absolue)},$$

ou bien [à cause de $4k^4\varepsilon^2 = 4\omega^4\nu^2 =$ sensiblement $(A^2 + C^2)^2\nu^2$],

$$(18) \qquad \nu < \frac{A^2 - C^2}{A^2 + C^2}\sin 2\theta'.$$

Lorsque ε atteint sa valeur absolue maximum, l'expression (16) ne conserve que son premier terme : une des valeurs de ω^2 est alors indépendante de U', U'', et l'autre valeur devient égale à la première pour toutes les ondes planes dont les normales sont sur le cône $V' = 90°$.

Les cristaux des cinq premiers systèmes ont un de leurs axes minéralogiques perpendiculaire au plan des autres, et leur axe de non-symétrie optique, s'il existait, devrait être dans ce plan, vu l'absence de raisons pour qu'il se trouvât plutôt d'un côté que de l'autre; mais, ces cristaux coïncidant avec eux-mêmes lorsqu'on les fait tourner, autour de leur axe normal, d'angles égaux à 60, 90, 120 ou 180 degrés, l'existence d'un axe de non-symétrie entraînerait, dans le même plan, celle de plusieurs axes pareils, tandis qu'aucun milieu ne peut, d'après les lois établies ci-dessus, en avoir plus d'un. On a donc, chez tous ces cristaux, $\nu = 0$, et la lumière s'y propage et s'y polarise comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture. Quant à ceux du sixième système, je ne vois pas de raison pour y supposer ε nul, et il faudrait des expériences précises, faites sur des rayons sensiblement perpendiculaires au plan des zx, c'est-à-dire au plan des deux axes optiques, pour trancher la question de savoir s'ils obéissent aux lois générales établies dans ce Mémoire ou à celles plus particulières de Fresnel.

Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles.

PAR M. L. PAINVIN.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 18 juillet 1870. *Comptes rendus*, t. LXI, p. 217.)

1. Il arrive très-fréquemment que les équations tangentielles d'une surface développable résultent immédiatement des données d'une question, ou s'en déduisent par des calculs généralement simples, et qu'il serait au contraire extrêmement difficile d'obtenir les équations de l'arête de rebroussement de cette surface. Il est donc important d'avoir des formules qui permettent d'étudier sur les équations tangentielles elles-mêmes les propriétés de cette arête de rebroussement; ces formules, qui n'ont jamais été données, sont l'objet de cette Note.

2. Notations :

u, v, w sont les coordonnées tangentielles d'un plan, c'est-à-dire les inverses des coordonnées à l'origine de ce plan (les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires). Si ce plan est tangent à la développable, ce sera le plan osculateur en un certain point M de l'arête de rebroussement;

x, y, z seront les coordonnées du point M.

Je désignerai, en outre, par

α, β, γ les angles de la tangente en M à l'arête de rebroussement;

λ, μ, ν les angles de l'axe du plan osculateur;

ξ, η, ζ les angles de la normale principale;

ds l'élément de l'arête de rebroussement;

$d\sigma$ l'angle de deux tangentes infiniment voisines;

$d\tau$ l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins;

θ l'angle au sommet du cône droit osculateur;

R le rayon de courbure;

T le rayon de torsion.

5. Une surface développable étant définie par deux équations tangentielles telles que

$$f(u, v, w) = 0, \quad F(u, v, w) = 0,$$

nous pouvons regarder u, v, w comme des fonctions déterminées d'un certain paramètre arbitraire. Pour simplifier l'écriture des formules, nous poserons

$$(1^\circ) \qquad \begin{cases} u_1 = du, & u_2 = d^2u, \\ v_1 = dv, & v_2 = d^2v, \\ w_1 = dw, & w_2 = d^2w, \end{cases}$$

$$(2^\circ) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ du & dv & dw \\ d^2u & d^2v & d^2w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix};$$

puis nous désignerons par U, V, W,...; U_1,..., les déterminants partiels de Δ, de sorte que

$$(3^\circ) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{d\Delta}{du} = dv\,d^2w - dw\,d^2v, \\ V = \dfrac{d\Delta}{dv} = dw\,d^2u - du\,d^2w, \\ W = \dfrac{d\Delta}{dw} = du\,d^2v - dv\,d^2u; \\ U_1 = \dfrac{d\Delta}{du_1} = w\,d^2v - v\,d^2w, \\ V_1 = \dfrac{d\Delta}{dv_1} = u\,d^2w - w\,d^2u, \\ W_1 = \dfrac{d\Delta}{dw_1} = v\,d^2u - u\,d^2v; \\ U_2 = \dfrac{d\Delta}{du_2} = v\,dw - w\,dv, \\ V_2 = \dfrac{d\Delta}{dv_2} = w\,du - u\,dw, \\ W_2 = \dfrac{d\Delta}{dw_2} = u\,dv - v\,du. \end{cases}$$

§ I. — *Détermination des quantités* α, β, γ; λ, μ, ν; ξ, η, ζ; x, y, z; dx, dy, dz.

4. Les coordonnées de trois plans tangents infiniment voisins seront

$$\begin{array}{lccc}
(\mathrm{P}) & u, & v, & w, \\
(\mathrm{P}_1) & u + du, & v + dv, & w + dw, \\
(\mathrm{P}_2) & u + 2du + d^2u, & v + 2dv + d^2v, & w + 2dw + d^2w;
\end{array}$$

on en conclut, pour les équations de ces trois plans

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
(\mathrm{P}) & uX + vY + wZ - 1 = 0, \\
(\mathrm{P}_1) & (u + du)X + (v + dv)Y + (w + dw)Z = 1, \\
(\mathrm{P}_2) & u + 2du + d^2u)X + (v + 2dv + d^2v)Y + (w + 2dw + d^2w)Z = 1;
\end{array}\right.$$

X, Y, Z sont les coordonnées rectilignes variables d'un point.

Dans les calculs suivants, nous désignerons fréquemment ± 1 par $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$; les lettres différentes $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ indiquant l'indépendance des signes $+$ et $-$.

Les angles de l'axe du plan tangent P (ou *plan osculateur*) étant désignés par λ, μ, ν, on a, d'après la première des équations (1)

$$(2)\qquad \frac{\cos\lambda}{u} = \frac{\cos\mu}{v} = \frac{\cos\nu}{w} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

La tangente MT en M est l'intersection des deux plans (P) et (P_1), c'est-à-dire

$$uX + vY + wZ = 1,$$
$$(u + du)X + (v + dv)Y + (w + dw)Z = 1;$$

ces deux équations peuvent être remplacées par le système suivant

$$(3)\quad (\mathrm{MT})\qquad \left\{\begin{array}{l}
uX + vY + wZ = 1, \\
X\,du + Y\,dv + Z\,dw = 0;
\end{array}\right.$$

α, β, γ étant les angles de la droite (3) avec les axes de coordonnées, on a

$$\frac{\cos\alpha}{v\,dw - w\,dv} = \frac{\cos\beta}{w\,du - u\,dw} = \frac{\cos\gamma}{u\,dv - v\,du},$$

c'est-à-dire en ayant égard aux notations du n° 3

$$(4)\qquad \frac{\cos\alpha}{U_2} = \frac{\cos\beta}{V_2} = \frac{\cos\gamma}{W_2} = \frac{1}{\varepsilon'\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}}.$$

La normale principale (ξ, η, ζ) est l'axe du *plan rectifiant*, c'est-à-dire du plan passant par la tangente MT, et perpendiculaire au plan osculateur (u, v, w). Or l'équation du plan rectifiant est, d'après cette définition,

$$(5)\qquad (vW_2 - wV_2)X + (wU_2 - uW_2)Y + (uV_2 - vU_2)Z = uu_1 + vv_1 + ww_1;$$

par conséquent, les angles ξ, η, ζ seront donnés par les égalités

$$\frac{\cos\xi}{vW_2 - wV_2} = \frac{\cos\eta}{wU_2 - uW_2} = \frac{\cos\zeta}{uV_2 - vU_2}.$$

Si l'on remarque qu'on a l'identité

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &(vW_2 - wU_2)^2 + (wU_2 - uW_2)^2 + (uV_2 - vU_2)^2 \\ &= (u^2 + v^2 + w^2)(U_2^2 + V_2^2 + W_2^2) - (uU_2 + vV_2 + wW_2)^2 \\ &= (u^2 + v^2 + w^2)(U_2^2 + V_2^2 + W_2^2), \end{aligned}\right.$$

on conclut des relations qui précèdent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos\xi}{vW_2 - wV_2} &= \frac{\cos\eta}{wU_2 - uW_2} = \frac{\cos\zeta}{uV_2 - vU_2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon''\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}}. \end{aligned}\right.$$

5. Calculons maintenant les coordonnées du point M.

Le point M est l'intersection des trois plans tangents infiniment voisins (1), n° 4; les équations de ces trois plans, prises simultanément,

donnent un système qu'on peut remplacer par le système suivant :

$$(8)\qquad \begin{cases} xu + yv + zw = 1, \\ x\,du + y\,dv + z\,dw = 0, \\ x\,d^2u + y\,d^2v + z\,d^2w = 0; \end{cases}$$

eu égard aux notations du n° 5, on tire de ces équations

$$(9)\qquad x = \frac{U}{\Delta},\quad y = \frac{V}{\Delta},\quad z = \frac{W}{\Delta}.$$

Il est alors facile d'obtenir dx, dy, dz. On a, en effet

$$dx = \frac{\Delta\,dU - U\,d\Delta}{\Delta^2};$$

or

$$\Delta = uU + vV + wW,$$

$$\begin{aligned} d\Delta &= u\,dU + v\,dV + w\,dW + U\,du + V\,dv + W\,dw \\ &= u\,dU + v\,dV + w\,dW, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(uU + vV + wW)\,dU - (u\,dU - v\,dV + w\,dW)\,U}{\Delta^2} \\ &= \frac{(vV + wW)\,dU - (v\,dV - w\,dW)\,U}{\Delta^3}. \end{aligned}$$

Mais

$$(10)\qquad \begin{cases} dU = dv\,d^3w - dw\,d^3v, \\ dV = dw\,d^3u - du\,d^3w, \\ dW = du\,d^3v - dv\,d^3u. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de dx, et en ordonnant par rapport à d^3u, d^3v, d^3w, il vient

$$dx = -\frac{(U\,d^3u + V\,d^3v + W\,d^3w)\,U}{\Delta^2}.$$

Si donc on pose

$$(11)\qquad H = -(U\,d^3u + V\,d^3v + W\,d^3w),$$

on a définitivement

$$(12)\qquad \frac{dx}{U_2} = \frac{dy}{V_2} = \frac{dz}{W_2} = \frac{H}{\Delta^2}.$$

On conclut de là

$$(13)\qquad ds = \varepsilon''' \frac{H}{\Delta^2} \sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}.$$

Nous allons d'abord chercher les relations qui existent entre les signes ε, ε',..., pour qu'on ait les égalités

$$(14)\qquad dx = ds \cos\alpha, \quad dy = ds \cos\beta, \quad dz = ds \cos\gamma;$$

pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$\varepsilon''' = \varepsilon'.$$

6. Ainsi, en résumé, nous avons donc

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{z}{W} = \frac{1}{\Delta}, \\ &\frac{dx}{U_2} = \frac{dy}{V_2} = \frac{dz}{W_2} = \frac{H}{\Delta^2}, \\ &ds = \varepsilon' \frac{H}{\Delta^2} \sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}, \\ &H = -(U\,d^3u + V\,d^3v + W\,d^3w); \end{aligned}\right.$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cos\lambda}{u} = \frac{\cos\mu}{v} = \frac{\cos\nu}{w} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \\ &\frac{\cos\alpha}{U_2} = \frac{\cos\beta}{V_2} = \frac{\cos\gamma}{W_2} = \frac{1}{\varepsilon'\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}}, \\ &\frac{\cos\xi}{vW_2 - wV_2} = \frac{\cos\eta}{wU_2 - uW_2} = \frac{\cos\zeta}{uV_2 - vU_2} \\ &\qquad = \frac{1}{\varepsilon''\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}}. \end{aligned}\right.$$

§ II. — *Détermination des quantités* $d\cos\alpha, \ldots, d\cos\lambda, \ldots$, $d\cos\xi, \ldots$; $d\sigma$, $d\tau$.

7. Nous avons trouvé

$$\cos\lambda = \frac{u}{\varepsilon\sqrt{u^2+v^2+w^2}};$$

on déduit de cette expression

$$d\cos\lambda = \frac{du(u^2+v^2+w^2) - u(udu+vdv+wdw)}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{wV_2 - vW_2}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a donc les égalités

$$(17) \qquad \frac{d\cos\lambda}{wV_2 - vW_2} = \frac{d\cos\mu}{uW_2 - wU_2} = \frac{d\cos\nu}{vU_2 - uV_2} = \frac{1}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}};$$

égalités qu'on peut encore écrire, eu égard au dernier groupe des relations (16),

$$(17\ bis) \qquad \frac{d\cos\lambda}{\cos\xi} = \frac{d\cos\mu}{\cos\eta} = \frac{d\cos\nu}{\cos\zeta} = -\varepsilon\varepsilon''\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{u^2+v^2+w^2}.$$

On sait que

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2};$$

par conséquent, d'après les valeurs (17 *bis*),

$$(18) \qquad d\tau = \varepsilon'''\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{u^2+v^2+w^2}.$$

8. Nous avons trouvé, n° 6,

$$\cos\alpha = \frac{U_2}{\varepsilon'\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}};$$

de là on déduit

$$d\cos\alpha = \frac{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)dU_2-(U_2dU_2+V_2dV_2+W_2dW_2)U_2}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{V_2(V_2dU_2-U_2dV_2)-W_2(U_2dW_2-W_2dU_2)}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais les valeurs (3°) du n° 3 donnent

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} dU_2 &= vd^2w - wd^2v = -U_1,\\ dV_2 &= wd^2u - ud^2w = -V_1,\\ dW_2 &= ud^2v - vd^2u = -W_1:\end{aligned}\right.$$

l'expression de $d\cos\alpha$ devient alors

$$d\cos\alpha = \frac{V_2(U_2V_1-V_2U_1)-W_2(W_2U_1-U_2W_1)}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, si l'on pose

$$(20)\qquad D = \begin{vmatrix} U & V & W\\ U_1 & V_1 & W_1\\ U_2 & V_2 & W_2\end{vmatrix},$$

U, V,..., U_1, V_1,... étant les déterminants partiels de Δ, on sait que

$$(21)\qquad D = \Delta^2,\quad \frac{dD}{dU} = \Delta u,\quad \frac{dD}{dV} = \Delta v,\ldots;$$

d'après cela, on a, pour les valeurs de $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$,

$$(22)\qquad \frac{d\cos\alpha}{vW_2-wV_2} = \frac{d\cos\beta}{wU_2-uW_2} = \frac{d\cos\gamma}{uV_2-vU_2} = \frac{\Delta}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Eu égard au dernier groupe des relations (16), les égalités (22) peuvent encore s'écrire

$$(22\ bis)\qquad \frac{d\cos\alpha}{\cos\xi} = \frac{d\cos\beta}{\cos\eta} = \frac{d\cos\gamma}{\cos\zeta} = \varepsilon'\varepsilon''\frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{U_2^2+V_2^2+W_2^2}.$$

On sait d'ailleurs que

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2};$$

il résulte alors des valeurs (22 *bis*)

$$(23) \qquad d\sigma = \varepsilon^{IV}\frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{U_2^2+V_2^2+W_2^2}.$$

9. Calculons enfin $d\cos\xi$, $d\cos\eta$, $d\cos\zeta$.

On a trouvé, n° 6,

$$\cos\xi = \frac{vW_2 - wV_2}{\varepsilon''\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}$$

on déduit de là, en différentiant,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon''(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}(U_2^2+V_2^2+W^2)^{\frac{3}{2}}\,d\cos\xi \\
&\quad = (u^2+v^2+w^2)(U_2^2+V_2^2+W_2^2)(v\,dW_2 - w\,dV_2 + W_2\,dv - V_2\,dw) \\
&\qquad - (vW_2 - wV_2)[(uu_1+vv_1+ww_1)(U_2^2+V_2^2+W_2^2) \\
&\qquad\qquad + (u^2+v^2+w^2)(U_2\,dU_2 + V_2\,dV_2 + W_2\,dW_2)].
\end{aligned}$$

Eu égard aux relations (19), le second membre de l'égalité précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&(U_2^2+V_2^2+W_2^2)[(u^2+v^2+w^2)(v_1W_2 - w_1V_2) \\
&\qquad - (uu_1+vv_1+ww_1)(vW_2 - wV_2)] \\
&+ (u^2+v^2+w^2)[(U_2^2+V_2^2+W_2^2)(wV_1 - vW_1) \\
&\qquad + (U_2U_1+V_2V_1+W_2W_1)(vW_2 - wV_2)],
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
&(U_2^2+V_2^2+W_2^2)[W_2(u^2v_1+v^2v_1+w_2v_1 - uvu_1 - v^2v_1 - vww_1) \\
&\qquad + V_2(uwu_1+vwv_1+w^2w_1 - u^2w_1 - v^2w_1 - w^2w_1)] \\
&+ (u^2+v^2+w^2)[w(U_2^2V_1+V_2^2V_1+W_2^2V_1 - U_2V_2U_1 - V_2^2V_1 - V_2W_2W_1) \\
&\qquad + v(U_2W_2U_1 + V_2W_2V_1 + W_2^2W_1 \\
&\qquad\qquad - U_2^2W_1 - V_2^2W_1 - W_2^2W_1)];
\end{aligned}$$

puis, en ayant égard aux relations (20), (21), n° **8**, (3°), n° **5**,

$$(U_2^2+V_2^2+W_2^2)[W_2(uW_2-wU_2)+V_2(uV_2-vU_2)]$$
$$+(u^2+v^2+w^2)\left[w\left(W_2\frac{dD}{dU}-U_2\frac{dD}{dW}\right)+v\left(V_2\frac{dD}{dU}-U_2\frac{dD}{dV}\right)\right],$$

ou encore

$$(U_2^2+V_2^2+W_2^2)[u(U_2^2+V_2^2+W_2^2)-U_2(uU_2+vV_2+wW_2)]$$
$$+\Delta(u^2+v^2+w^2)[u(uU_2+vV_2+wW_2)-U_2(u^2+v^2+w^2)],$$

expression qui se réduit définitivement à

$$u(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^2-\Delta U_2(u^2+v^2+w^2)^2.$$

On a ainsi les formules

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
\varepsilon''d\cos\xi &= u\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}-U_2\Delta\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\varepsilon''d\cos\eta &= v\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}-V_2\Delta\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\varepsilon''d\cos\zeta &= w\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}-W_2\Delta\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

10. Nous allons maintenant établir la correspondance des quantités ε, ε', ε'', ε''', ε^{IV}, de manière à vérifier en grandeur et en signe les *relations fondamentales* données par M. J. Serret (*Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 622) :

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}
&d\cos\alpha=\cos\xi\,d\sigma,\quad d\cos\lambda=\cos\xi\,d\tau,\quad d\cos\xi=-\cos\alpha\,d\sigma-\cos\lambda\,d\tau,\\
&d\cos\beta=\cos\eta\,d\sigma,\quad d\cos\mu=\cos\eta\,d\tau,\quad d\cos\eta=-\cos\beta\,d\sigma-\cos\mu\,d\tau,\\
&d\cos\gamma=\cos\zeta\,d\sigma;\quad d\cos\nu=\cos\zeta\,d\tau;\quad d\cos\zeta=-\cos\gamma\,d\sigma-\cos\nu\,d\tau.
\end{aligned}\right.$$

Eu égard aux formules (16), (17), (18), (22), (23), (24), les relations (23) donnent

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
\varepsilon^{\text{IV}}&=\varepsilon'\varepsilon'',\\
\varepsilon'''&=-\varepsilon\varepsilon'';
\end{aligned}\right.$$

ce sont les seules conditions nécessaires pour que les relations (25) soient vérifiées.

Maintenant nous pouvons imposer aux quantités R et T, définies par les égalités

$$(25\ bis)\qquad R = \frac{ds}{d\sigma},\quad T = \frac{ds}{d\tau},$$

la condition d'être positives.

Or, d'après les formules (15), (18) et (23), et les relations (26), on a

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} R &= \varepsilon''\frac{H}{\Delta^3}\frac{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ T &= -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\frac{H}{\Delta^2}(u^2+v^2+w^2).\end{aligned}\right.$$

Les quantités R et T devant être positives, on a les conclusions suivantes :

$$\text{si}\quad \frac{H}{\Delta} > 0,\quad \varepsilon'' = +1\quad \text{et}\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon' &= -\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta > 0,\\ \varepsilon' &= +\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta < 0;\end{aligned}\right.$$

$$\text{si}\quad \frac{H}{\Delta} < 0,\quad \varepsilon'' = -1\quad \text{et}\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon' &= -\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta > 0,\\ \varepsilon' &= +\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta < 0.\end{aligned}\right.$$

11. En résumé, nous avons les formules qui suivent.

On a posé :

$$(I)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1)\ \left\{\begin{aligned} u_1 &= du, & u_2 &= d^2u,\\ v_1 &= dv, & v_2 &= d^2v,\\ w_1 &= dw, & w_2 &= d^2w;\end{aligned}\right. \qquad (2)\quad \Delta = \begin{vmatrix} u & v & w\\ u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\end{vmatrix};\\ &(3)\ \left\{\begin{aligned} U &= \frac{d\Delta}{du}, & V &= \frac{d\Delta}{dv}, & W &= \frac{d\Delta}{dw},\\ U_2 &= \frac{d\Delta}{du_2}, & V_2 &= \frac{d\Delta}{dv_2}, & W_2 &= \frac{d\Delta}{dw_2}:\end{aligned}\right.\\ &(4)\qquad H = -(Ud^3u + Vd^3v + Wd^3w),\end{aligned}\right.$$

et l'on a alors

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases}
(1)\quad \dfrac{x}{\mathrm{U}} = \dfrac{y}{\mathrm{V}} = \dfrac{z}{\mathrm{W}} = \dfrac{1}{\Delta},\\[2ex]
(2)\quad \dfrac{dx}{\mathrm{U}_2} = \dfrac{dy}{\mathrm{V}_2} = \dfrac{dz}{\mathrm{W}_2} = \dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^2},\\[2ex]
(3)\quad ds = \varepsilon' \dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^2}\sqrt{\mathrm{U}_2^2 + \mathrm{V}_2^2 + \mathrm{W}_2^2};
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{III})\quad \begin{cases}
(1)\quad \dfrac{\cos\lambda}{u} = \dfrac{\cos\mu}{v} = \dfrac{\cos\nu}{w} = \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\[2ex]
(2)\quad \dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{U}_2} = \dfrac{\cos\beta}{\mathrm{V}_2} = \dfrac{\cos\gamma}{\mathrm{W}_2} = \dfrac{1}{\varepsilon'\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}},\\[2ex]
(3)\quad \dfrac{\cos\xi}{v\mathrm{W}_2 - w\mathrm{V}_2} = \dfrac{\cos\eta}{w\mathrm{U}_2 - u\mathrm{W}_2} = \dfrac{\cos\zeta}{u\mathrm{V}_2 - v\mathrm{U}_2} = \dfrac{1}{\varepsilon''\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}}.
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{IV})\quad \begin{cases}
(1)\quad \dfrac{d\cos\lambda}{w\mathrm{V}_2 - v\mathrm{W}_2} = \dfrac{d\cos\mu}{u\mathrm{W}_2 - w\mathrm{U}_2} = \dfrac{d\cos\nu}{v\mathrm{U}_2 - u\mathrm{V}_2} = \dfrac{1}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}},\\[2ex]
(2)\quad \dfrac{d\cos\alpha}{v\mathrm{W}_2 - w\mathrm{V}_2} = \dfrac{d\cos\beta}{w\mathrm{U}_2 - u\mathrm{W}_2} = \dfrac{d\cos\gamma}{u\mathrm{V}_2 - v\mathrm{U}_2} = \dfrac{\Delta}{\varepsilon'(\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2)^{\frac{3}{2}}}.\\[2ex]
(3)\quad \begin{cases}
\varepsilon'' d\cos\xi = u\dfrac{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}} - \mathrm{U}_2\,\Delta\dfrac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2)^{\frac{3}{2}}};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{V})\quad \begin{cases}
(1)\quad d\tau = -\varepsilon\varepsilon''\dfrac{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}}{u^2+v^2+w^2},\\[2ex]
(2)\quad d\sigma = \varepsilon'\varepsilon''\dfrac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2},\\[2ex]
(3)\quad \mathrm{R} = \varepsilon''\dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^3}\dfrac{(\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.\\[2ex]
(4)\quad \mathrm{T} = -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^2}(u^2+v^2+w^2).
\end{cases}
$$

Les lettres ε, ε', ε'' désignent ± 1; ainsi on a

$$\varepsilon = \pm 1,\quad \varepsilon' = \pm 1,\quad \varepsilon'' \pm 1.$$

J'ai adopté des lettres différentes pour conserver au choix des signes +

et — toute l'indépendance qu'il peut avoir; les radicaux doivent être pris en valeur absolue.

Remarque I. — Dans les formules qui précèdent, les combinaisons des quantités ε, ε', ε'' ont été faites de manière à vérifier constamment, en grandeur et en signe, les relations importantes

$$dx = ds\cos\alpha, \quad d\cos\lambda = \cos\xi\, d\tau;$$
$$d\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma; \quad d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque II. — Si l'on assujettit les quantités R et T à être positives, on a les conditions suivantes :

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \varepsilon' = -\varepsilon, \quad \text{si} \quad \Delta > 0; \quad \varepsilon'' = +1, \quad \text{si} \quad \dfrac{H}{\Delta} > 0, \\ \varepsilon' = +\varepsilon, \quad \text{si} \quad \Delta < 0; \quad \varepsilon'' = -1, \quad \text{si} \quad \dfrac{H}{\Delta} < 0. \end{cases}$$

Remarque III. — Les formules précédentes ne sont pas applicables aux développables circonscrites au cercle imaginaire de l'infini (*voir* la note 1).

§ III. — *Cône droit osculateur.*

12. Nous appellerons *cône droit osculateur* en M un cône ayant son sommet en M et touchant trois plans tangents infiniment voisins.

Nous pouvons définir ce cône par son sommet, dont l'équation tangentielle est celle du point M, savoir :

$$(1) \qquad \mathfrak{U}x + \mathfrak{V}y + \mathfrak{W}z - 1 = 0,$$

et par une sphère dont l'équation tangentielle sera

$$(2) \qquad (a\mathfrak{U} + b\mathfrak{V} + c\mathfrak{W} - 1)^2 = \mathfrak{R}^2(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{W}^2);$$

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sont les coordonnées tangentielles variables; a, b, c sont

les coordonnées ponctuelles du centre de la sphère (2); $\mathcal{R}$ est son rayon.

Exprimons maintenant que la sphère (2) touche les trois plans tangents infiniment voisins :

$$(u,\ v,\ w);\quad (u+du,\ v+dv,\ w+dw);$$
$$(u+2du+d^2u,\ v+2dv+d^2v,\ w+2dw+d^2w);$$

on a, après avoir extrait la racine carrée,

$$(2)\left\{\begin{aligned}
&au+bv+cw=1+\mathcal{R}\sqrt{(u^2+v^2+w^2)},\\
&a(u+du)+b(v+dv)+c(w+dw)\\
&\quad=1+\mathcal{R}\sqrt{(u+du)^2+(v+dv)^2+(w+dw)^2},\\
&a(u+2du+d^2u)+b(v+2dv+d^2v)+c(w+2dw+d^2w)\\
&\quad=1+\mathcal{R}\sqrt{(u+2du+d^2u)^2+(v+2dv+d^2v)^2+(w+2dw+d^2w)^2};
\end{aligned}\right.$$

$\mathcal{R}$ représente *plus* ou *moins* la distance du point (a, b, c) au plan $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$; pour trois plans infiniment voisins et quelconques, cette distance ne change pas de signe : on doit donc attribuer le même signe aux radicaux qui entrent dans les équations (3). Mais ces trois équations simultanées peuvent se remplacer par les suivantes, dont les deux dernières ont été obtenues en différentiant successivement la première :

$$(4)\left\{\begin{aligned}
&au+bv+cw=1+\frac{\mathcal{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}(u^2+v^2+w^2),\\
&adu+bdv+cdw=\frac{\mathcal{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}(udu+vdv+wdw),\\
&ad^2u+bd^2v+cd^2w=\frac{\mathcal{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\Big(ud^2u+vd^2v+wd^2w\\
&\qquad\qquad+\frac{U_2^2+V_2^2+W_2^2}{u^2+v^2+w^2}\Big).
\end{aligned}\right.$$

Pour résoudre ces équations par rapport à a, b, c, multiplions-les par U, U_1, U_2, puis par V, V_1, V_2, enfin par W, W_1, W_2, et ajoutons;

eu égard aux notations du n° **5**, il vient

$$(5)\quad \begin{cases} a\Delta = \mathrm{U} + \dfrac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\left[u\Delta + \mathrm{U}_2\dfrac{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}{u^2+v^2+w^2}\right], \\ b\Delta = \mathrm{V} + \dfrac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\left[v\Delta + \mathrm{V}_2\dfrac{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}{u^2+v^2+w^2}\right], \\ c\Delta = \mathrm{W} + \dfrac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\left[w\Delta + \mathrm{W}_2\dfrac{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}{u^2+v^2+w^2}\right]. \end{cases}$$

Les formules (II), (III), (V) du n° **11** permettent d'écrire comme il suit les équations qui précèdent :

$$(6)\quad \begin{cases} a = x + \varepsilon\mathfrak{R}\left[\cos\lambda - \cos\alpha\dfrac{d\tau}{d\sigma}\right], \\ b = y + \varepsilon\mathfrak{R}\left[\cos\mu - \cos\beta\dfrac{d\tau}{d\sigma}\right], \\ c = z + \varepsilon\mathfrak{R}\left[\cos\nu - \cos\gamma\dfrac{d\tau}{d\sigma}\right]. \end{cases}$$

Les équations tangentielles du cône droit osculateur sont alors

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}x + \mathfrak{V}y + \mathfrak{W}z - 1 = 0, \\ \left[\mathfrak{U}\left(\cos\lambda - \dfrac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha\right) + \mathfrak{V}\left(\cos\mu - \dfrac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta\right) + \mathfrak{W}\left(\cos\nu - \dfrac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma\right)\right]^2 \\ \quad = \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{W}^2; \end{cases}$$

la seconde des équations (7) représente un cercle à l'infini inscrit dans le cône osculateur.

Ce cône doit évidemment toucher le plan (u, v, w) suivant la génératrice (ou tangente) α, β, γ; l'axe de ce cône est donc situé dans le *plan rectifiant*. La vérification de ce fait sera d'ailleurs facile à l'aide des formules que nous allons établir.

15. Déterminons maintenant l'axe de ce cône et son angle au sommet.

Désignons par θ le demi-angle au sommet (angle aigu) du cône

droit osculateur; par α', β', γ' les angles de son axe avec les axes de coordonnées.

Puisque le centre de la sphère inscrite est évidemment sur l'axe du cône, on a

$$(8)\qquad \frac{\cos\alpha'}{a-x} = \frac{\cos\beta'}{b-y} = \frac{\cos\gamma'}{c-z} = \frac{\sin\theta}{\mathcal{R}}.$$

Il est entendu que α', β', γ' désignent les angles que fait, avec les axes positifs de coordonnées, le demi-axe du cône osculateur, prolongé à partir du sommet M de manière à faire, avec la demi-droite définie par les angles α, β, γ, un *angle aigu* θ; d'ailleurs les angles α, β, γ sont donnés sans ambiguïté par les formules (III) du n° **11**.

Si l'on substitue les valeurs (6) dans les équations (8), il vient

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha' &= \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\left[\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha - \cos\lambda\right],\\ \cos\beta' &= \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\left[\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta - \cos\mu\right],\\ \cos\gamma' &= \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\left[\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma - \cos\nu\right]; \end{aligned}\right.$$

ε_1 désigne ± 1, et se trouve introduit à cause de l'indétermination du signe de $\mathcal{R}$. Nous allons choisir ε_1 par la condition que l'angle θ est aigu, et que α', β', γ' définissent la direction du demi-axe faisant cet angle aigu avec la demi-droite (α, β, γ).

En multipliant les équations (9) par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et en ajoutant, on trouve

$$(10)\qquad \cos\theta = \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Or, d'après les formules (V) du n° **11**, on a

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\Delta\frac{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent,

$$(11)\qquad \operatorname{tang}\theta = -\varepsilon_1\varepsilon'\Delta\frac{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'angle θ étant aigu par convention, sa tangente doit être positive; mais nous avons vu, n° **11**, *Remarque II*, qu'on doit prendre $\varepsilon' = -\varepsilon$ ou $\varepsilon' = +\varepsilon$, suivant que Δ est positif ou négatif; d'après cela, le produit $(-\varepsilon\varepsilon'\Delta)$ est toujours positif; par suite, en supposant $\varepsilon_1 = \varepsilon$, l'expression de $\operatorname{tang}\theta$ sera toujours positive, en égard aux conventions faites.

Ainsi, *les angles α', β', γ', avec les axes positifs de coordonnées, du demi-axe du cône droit osculateur faisant l'*ANGLE AIGU θ *avec la demi-droite définie par les angles α, β, γ, seront donnés sans ambiguïté par les formules suivantes :*

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha' &= \sin\theta\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha - \cos\lambda\right),\\ \cos\beta' &= \sin\theta\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta - \cos\mu\right),\\ \cos\gamma' &= \sin\theta\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma - \cos\nu\right):\end{aligned}\right.$$

et l'angle aigu θ est donné par la formule

$$(13)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{d\sigma}{d\tau} = -\varepsilon\varepsilon'\Delta\frac{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$d\omega = \varepsilon_2\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2},$$

on a

$$\sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega},\quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega}.$$

et, en égard aux formules (V) du n° **11**,

$$\sin\theta = \frac{\varepsilon'\varepsilon''}{\varepsilon_2}\frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}},\quad \cos\theta = -\frac{\varepsilon\varepsilon''}{\varepsilon_2}\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}}.$$

Mais l'angle θ est aigu par définition; son cosinus et son sinus doivent donc être positifs, c'est-à-dire qu'on doit avoir à la fois

$$\varepsilon_2\varepsilon'\varepsilon''\Delta > 0 \quad\text{et}\quad -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2 > 0;$$

or, comme $\varepsilon' = -\varepsilon$ ou $\varepsilon' = +\varepsilon$, suivant que Δ est positif ou négatif, on voit que ces inégalités seront toutes deux satisfaites si l'on prend $\varepsilon_2 = -\varepsilon\varepsilon''$. Par conséquent, on aura sans ambiguïté

$$(14) \qquad \sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega},$$

après avoir posé

$$(15) \qquad d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}.$$

14. Ainsi, en résumé,

Les équations tangentielles du cône osculateur en $M(x, y, z)$ *sont*

$$(\mathrm{VII}) \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{v}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{w}z - 1 = 0, \\ & \left[\mathfrak{v}\left(\cos\lambda - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha\right) + \mathfrak{y}\left(\cos\mu - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta\right) + \mathfrak{w}\left(\cos\nu - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma\right)\right]^2 \\ & \quad = \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{w}^2; \end{aligned} \right.$$

$\mathfrak{v}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{w}$ sont les coordonnées tangentielles variables.

Désignons par θ l'*angle aigu* que fait le demi-axe du cône osculateur avec la demi-droite définie par les angles α, β, γ; représentons par α', β', γ' les angles que fait, avec les axes positifs des coordonnées, le demi-axe que nous venons de définir. Si l'on pose

$$(\mathrm{VIII}) \left\{ \begin{aligned} & (1) \quad d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}, \\ & \text{on aura sans ambiguïté} \\ & (2) \quad \sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{d\sigma}{d\tau}; \\ & (3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \cos\alpha' = \cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta, \\ & \cos\beta' = \cos\beta\cos\theta - \cos\mu\sin\theta, \\ & \cos\gamma' = \cos\gamma\cos\theta - \cos\nu\sin\theta; \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

les quantités α, β, γ, $d\sigma$, $d\tau$ sont définies par les formules du n° **11**,

et les ε, ε', ε'' ont toujours la signification précisée dans la *Remarque II* du même numéro.

15. Je rappellerai les propriétés suivantes bien connues :

1° *La quantité $d\omega$ est l'angle de deux normales infiniment voisines;*

2° *L'axe du cône droit osculateur est l'intersection de deux plans rectifiants infiniment voisins.*

J'ai déjà dit qu'on nomme *plan rectifiant* le plan mené par la tangente (α, β, γ) à l'arête de rebroussement perpendiculairement au plan osculateur correspondant; ce plan osculateur n'est autre que le plan tangent (u, v, w) à la développable.

Ces plans enveloppent une surface développable qui a été nommée *développable rectifiante,* d'après cette propriété évidente que la courbe primitive est une ligne géodésique de cette développable.

3° *L'axe du cône osculateur est donc une génératrice de la développable rectifiante.*

4° Si l'on considère un point quelconque I de la génératrice $MG(\alpha, \beta, \gamma)$ appartenant à la surface développable considérée, le rayon de courbure R_1 de la section principale, faite en ce point dans la surface développable, a pour valeur $d \tang \theta$; d est la distance du point considéré I au point correspondant M de l'arête de rebroussement; θ est le demi-angle au sommet du cône osculateur.

On voit, en outre, que le centre de courbure se trouve sur l'axe du cône osculateur; de sorte que :

La développable rectifiante est le lieu des centres de courbure principale pour la surface développable primitive.

Quoique le sujet ait déjà été abordé plusieurs fois, il y a donc quelque intérêt à revenir un peu sur la développable rectifiante; ce sera l'objet du paragraphe suivant.

§ IV. — *Développable rectifiante.*

16. Je rappellerai d'abord les relations suivantes, qui existent entre trois directions rectangulaires (α, β, γ), (λ, μ, ν), (ξ, η, ζ) :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1, \\ \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1; \\ \cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta = 0, \\ \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0, \\ \cos\lambda\cos\xi + \cos\mu\cos\eta + \cos\nu\cos\zeta = 0; \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1, \\ \cos^2\beta + \cos^2\eta + \cos^2\mu = 1, \\ \cos^2\gamma + \cos^2\zeta + \cos^2\nu = 1; \\ \cos\alpha\cos\beta + \cos\xi\cos\eta + \cos\lambda\cos\mu = 0, \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\xi\cos\zeta + \cos\lambda\cos\nu = 0, \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\eta\cos\zeta + \cos\mu\cos\nu = 0. \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = \varepsilon_0, \qquad \varepsilon_0 = \pm 1.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\lambda = \varepsilon_0(\cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta), \\ \cos\mu = \varepsilon_0(\cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta), \\ \cos\nu = \varepsilon_0(\cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi); \\ \cos\xi = \varepsilon_0(\cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta), \\ \cos\eta = \varepsilon_0(\cos\nu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\gamma), \\ \cos\zeta = \varepsilon_0(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha); \\ \cos\alpha = \varepsilon_0(\cos\eta\cos\nu - \cos\eta\cos\mu), \\ \cos\beta = \varepsilon_0(\cos\zeta\cos\lambda - \cos\xi\cos\nu), \\ \cos\gamma = \varepsilon_0(\cos\xi\cos\mu - \cos\zeta\cos\lambda). \end{array}\right.$$

On a, en outre, les relations déjà citées plusieurs fois :

$$(5)\quad \begin{cases} dx = ds\cos\alpha, & d.\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma, \\ dy = ds\cos\beta, & d.\cos\beta = \cos\eta\, d\sigma, \\ dz = ds\cos\gamma; & d.\cos\gamma = \cos\zeta\, d\sigma; \\ d.\cos\lambda = \cos\xi\, d\tau, & d.\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \\ d.\cos\mu = \cos\eta\, d\tau, & d.\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau, \\ d.\cos\nu = \cos\zeta\, d\tau; & d.\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau. \end{cases}$$

17. En désignant par α', β', γ' les angles de l'axe du cône osculateur faisant l'*angle aigu* θ avec la droite (α, β, γ), on a trouvé, n° **14**,

$$(\text{VIII})\quad \begin{cases} (1) & \begin{cases} \cos\alpha' = \cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta, \\ \cos\beta' = \cos\beta\cos\theta - \cos\mu\sin\theta, \\ \cos\gamma' = \cos\gamma\cos\theta - \cos\nu\sin\theta; \end{cases} \\ (2) & \sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{d\sigma}{d\tau}; \\ (3) & d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}. \end{cases}$$

Constatons d'abord que *l'axe du cône osculateur est l'intersection de deux plans rectifiants infiniment voisins.*

Le plan rectifiant passe par le point (x, y, z) et a pour axe la normale principale (ξ, η, ζ); son équation est donc

$$(1^\circ)\qquad (X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta = 0;$$

en différentiant cette équation et en ayant égard aux relations (5) et (1) du n° **16**, il vient

$$(2^\circ)\quad (X - x)d.\cos\xi + (Y - y)d.\cos\eta + (Z - z)d.\cos\zeta = 0.$$

Ces deux équations déterminent l'intersection de deux plans rectifiants infiniment voisins; or cette intersection est parallèle à la droite $(\alpha', \beta', \gamma')$, car on constate immédiatement que cette dernière droite est perpendiculaire aux axes des deux plans (1°) et (2°), c'est-à-dire

qu'on a

$$(3^\circ)\quad \begin{cases} \cos\alpha'\cos\xi + \cos\beta'\cos\eta + \cos\gamma'\cos\zeta = 0, \\ \cos\alpha' d.\cos\xi + \cos\beta' d.\cos\eta + \cos\gamma' d.\cos\eta = 0. \end{cases}$$

18. Nous désignerons les éléments de l'arête de rebroussement de la *développable rectifiante* par les mêmes lettres que précédemment, en les accentuant. Ainsi nous représenterons par :

x', y', z' les coordonnées du point M′ intersection de deux génératrices infiniment voisines de la développable rectifiante; M′ sera le *point correspondant* au point M;

α', β', γ' les angles de la tangente en M′ à l'arête de rebroussement de la développable rectifiante;

λ', μ', ν' les angles de l'axe du plan osculateur;

ξ', η', ζ' ceux de la normale principale;

ds' l'élément, en M′, de l'arête de rebroussement de la développable rectifiante;

$d\sigma'$ l'angle de deux tangentes infiniment voisines;

$d\tau'$ l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins;

θ' l'angle au sommet du cône droit osculateur à la rectifiante.

19. Le plan rectifiant de la développable primitive est précisément le plan qui enveloppe la développable rectifiante : il est donc son plan osculateur; par conséquent,

$$(6)\quad \begin{cases} \varepsilon_2\cos\lambda' = \cos\xi, \\ \varepsilon_2\cos\mu' = \cos\eta, \\ \varepsilon_2\cos\nu' = \cos\zeta. \end{cases}$$

Les valeurs de $\cos\xi'$, $\cos\eta'$, $\cos\zeta'$ seront données par le second groupe des formules (4), n° **16**, en ayant égard aux formules (1), n° **17**, et (6), n° **19**; on trouve ainsi

$$(7)\quad \begin{cases} \varepsilon_3\cos\xi' = -(\cos\lambda\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = \dfrac{d.\cos\xi}{d\omega}, \\ \varepsilon_3\cos\eta' = -(\cos\mu\cos\theta + \cos\beta\sin\theta) = \dfrac{d.\cos\eta}{d\omega}, \\ \varepsilon_3\cos\zeta' = -(\cos\nu\cos\theta + \cos\gamma\sin\theta) = \dfrac{d.\cos\zeta}{d\omega}; \end{cases}$$

car l'emploi des formules du n° **16**, pour des systèmes différents $\alpha,\ldots,\ \lambda,\ldots,\ \xi,\ldots;\ \alpha',\ldots,\ \lambda',\ldots,\ \xi',\ldots$ de directions rectangulaires, donne lieu à l'introduction de plusieurs facteurs ε_0, ε'_0 dont nous désignons le groupement par ε_3.

20. Calculons maintenant $d.\cos\alpha',\ldots;\ d.\cos\lambda',\ldots;\ d.\cos\mu',\ldots$.

La première des relations (1), n° **17**, donne

$$d.\cos\alpha' = d.\cos\alpha\cos\vartheta - \sin\vartheta\, d.\cos\lambda - (\cos\alpha\sin\vartheta + \cos\lambda\cos\vartheta)\,d\vartheta;$$

eu égard aux relations (5), n° **16**, et aux relations (2), n° **17**, on trouve la première des égalités suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} d.\cos\alpha' &= -(\cos\alpha\sin\vartheta + \cos\lambda\cos\vartheta)\,d\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\omega}\,d.\cos\xi = \cos\xi'.\,d\vartheta.\varepsilon_3,\\ d.\cos\beta' &= -(\cos\beta\sin\vartheta + \cos\mu\cos\vartheta)\,d\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\omega}\,d.\cos\eta = \cos\eta'.\,d\vartheta.\varepsilon_3,\\ d.\cos\gamma' &= -(\cos\gamma\sin\vartheta + \cos\nu\cos\vartheta)\,d\vartheta = \frac{d\vartheta}{d\omega}\,d.\cos\zeta = \cos\zeta'.\,d\vartheta.\varepsilon_3. \end{aligned}\right.$$

Des relations (6), n° **19**, et (5), n° **16**, on conclut

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_2\, d.\cos\lambda' &= d.\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau = \varepsilon_3\cos\xi'.\,d\omega,\\ \varepsilon_2\, d.\cos\mu' &= d.\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau = \varepsilon_3\cos\eta'.\,d\omega,\\ \varepsilon_2\, d.\cos\nu' &= d.\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau = \varepsilon_3\cos\zeta'.\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

Enfin des relations (7), n° **19**, nous tirons

$$\varepsilon_3\, d.\cos\xi' = -\cos\vartheta\, d.\cos\lambda - \sin\vartheta\, d.\cos\alpha + (\cos\lambda\sin\vartheta - \cos\alpha\cos\vartheta)\,d\vartheta;$$

puis, en ayant égard aux relations (5), n° **16**, (1) et (2), n° **17**, on a la première des égalités qui suivent :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_3\, d.\cos\xi' &= -\cos\alpha'\, d\vartheta - \cos\xi\, d\omega = -\cos\alpha'\, d\vartheta - \varepsilon_2\cos\lambda'\, d\omega,\\ \varepsilon_3\, d.\cos\eta' &= -\cos\beta\, d\vartheta - \cos\eta\, d\omega = -\cos\beta'\, d\vartheta - \varepsilon_2\cos\mu'\, d\omega,\\ \varepsilon_3\, d.\cos\zeta' &= -\cos\gamma\, d\vartheta - \cos\zeta\, d\omega = -\cos\gamma'\, d\vartheta - \varepsilon_2\cos\nu'\, d\omega. \end{aligned}\right.$$

21. Des valeurs (8) et (9) on déduit

$$d\sigma' = \sqrt{(d.\cos\alpha')^2 + (d.\cos\beta')^2 + (d.\cos\gamma')^2} = \pm\, d\vartheta,$$
$$d\tau' = \sqrt{(d.\cos\lambda')^2 + (d.\cos\mu')^2 + (d.\cos\nu')^2} = \pm\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2} = \pm\, d\omega.$$

Comme il importe de vérifier toujours les relations types

$$(11)\quad \begin{cases} d.\cos\alpha' = \cos\xi' d\sigma'; \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ d.\cos\lambda' = \cos\xi' d\tau'; \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ d.\cos\xi' = -\cos\alpha' d\sigma' - \cos\lambda' d\tau'; \ldots; \end{cases}$$

on voit, d'après les valeurs qui précèdent (7), (8), (9), (10), qu'on devra prendre en grandeur et signe

$$(12)\quad \begin{cases} d\sigma' = \varepsilon_3 d\theta, \\ d\tau' = \varepsilon_2 \varepsilon_3 d\omega. \end{cases}$$

Si l'on assujettit $\operatorname{tang}\theta' = \frac{d\sigma'}{d\tau'}$ à être positif, on voit qu'il faudra prendre

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} \varepsilon_2 = -\varepsilon\varepsilon'', & \text{si} \quad d\theta > 0; \\ \varepsilon_2 = \varepsilon\varepsilon'', & \text{si} \quad d\theta < 0. \end{cases}$$

On pourra encore disposer de ε_3 pour rendre R′ et T′ positifs.

22. Désignons par x', y', z' les coordonnées du point M′ que nous dirons *correspondant* au point M′, n° **18**; on aura

$$(13)\quad \begin{cases} x' = x + l\cos\alpha', \\ y' = y + l\cos\beta', \\ z' = z + l\cos\gamma'; \end{cases}$$

α', β', γ' désignent toujours le demi-axe du cône osculateur tel qu'il a été précisé ci-dessus, n° **14**; x, y, z sont les coordonnées du point M; l est la distance du point M′ au point M, cette distance, comptée à partir du point M′, étant regardée comme positive ou négative, suivant que le point M′ est sur la demi-droite définie par α', β', γ', ou sur le prolongement de cette demi-droite.

Pour obtenir la longueur l, nous différentierons les égalités (13) en regardant x', y', z' comme invariables; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= dx + l\,d.\cos\alpha' + \cos\alpha' dl, \\ 0 &= dy + l\,d.\cos\beta' + \cos\beta' dl, \\ 0 &= dz + l\,d.\cos\gamma' + \cos\gamma' dl; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, par l'élimination de dl,

$$\frac{ds\cos\alpha + l\,d.\cos\alpha'}{\cos\alpha'} = \frac{ds\cos\beta + l\,d.\cos\beta'}{\cos\beta'} = \frac{ds\cos\gamma + l\,d.\cos\gamma'}{\cos\gamma'}.$$

La comparaison des deux derniers rapports donne

$$ds(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta') = l(\cos\beta' d.\cos\gamma' - \cos\gamma' d.\cos\beta').$$

Si l'on a égard aux relations (1), n° **17**, (8), n° **20**, il vient

$$ds\sin\theta = l\,d\theta,$$

d'où l'on conclut

$$(14)\qquad l = \frac{ds\sin\theta}{d\theta} = \frac{ds\,d\sigma}{d\omega}.$$

Pour obtenir l'arc ds', nous différentierons maintenant les égalités (13) en faisant varier toutes les quantités, ce qui donne

$$dx' = dx + l\,d.\cos\alpha' + \cos\alpha' dl,$$

ou, d'après les relations (5), n° **16**, (8), n° **20**, (14), n° **22**, (1), n° **17**,

$$\begin{aligned} dx' &= ds\cos\alpha - ds\sin\theta(\cos\alpha\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta) + \cos\alpha' dl,\\ dx' &= ds\cos\theta(\cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta) + \cos\alpha' dl\\ &= \cos\alpha'\cos\theta\, ds + \cos\alpha' dl; \end{aligned}$$

on a donc, en définitive,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} dx' &= \cos\alpha'(\cos\theta\, ds + dl),\\ dy' &= \cos\beta'(\cos\theta\, ds + dl),\\ dz' &= \cos\gamma'(\cos\theta\, ds + dl). \end{aligned}\right.$$

On conclut de là

$$ds' = \varepsilon_1(\cos\theta\, ds + dl);$$

comme il nous faut vérifier les relations

$$(16)\qquad dx' = ds'\cos\alpha',\quad dy' = ds'\cos\beta',\quad dz' = ds'\cos\gamma',$$

il en résulte $\varepsilon_1 = +1$, et, par suite,

$$(17) \qquad ds' = \cos\theta\, ds + dl = \frac{d.l\sin\theta}{\sin\theta}.$$

Enfin si l'on pose

$$(18) \qquad d\omega' = -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{d\sigma'^2 + d\tau'^2} = -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{d\theta^2 + d\omega^2},$$

on aura, d'après les formules (VIII) du n° **17**, en désignant par θ' un angle aigu positif,

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{d\sigma'}{d\tau'}, \quad \sin\theta' = \frac{d\sigma'}{d\omega'}, \quad \cos\theta' = \frac{d\tau'}{d\omega'},$$

c'est-à-dire

$$(19) \qquad \operatorname{tang}\theta' = \varepsilon_2\frac{d\theta}{d\omega}, \quad \sin\theta' = \varepsilon_3\frac{d\theta}{d\omega'}, \quad \cos\theta' = \varepsilon_2\varepsilon_3\frac{d\omega}{d\omega'}.$$

25. En résumé, nous aurons, pour la *développable rectifiante*, les formules suivantes :

$$(\mathrm{VIII}) \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha' = \cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta, \\ \cos\beta' = \cos\beta\cos\theta - \cos\mu\sin\theta, \\ \cos\gamma' = \cos\gamma\cos\theta - \cos\nu\sin\theta; \end{array} \right. \\ (2) & \sin\theta = \dfrac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \dfrac{d\tau}{d\omega}, \quad \operatorname{tang}\theta = \dfrac{d\sigma}{d\tau}; \\ (3) & d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}. \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{IX}) \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2\cos\lambda' = \cos\xi, \\ \varepsilon_2\cos\mu' = \cos\eta, \\ \varepsilon_2\cos\nu' = \cos\zeta; \end{array} \right. \\ (2) & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_3\cos\xi' = -(\cos\alpha\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta) = \dfrac{d.\cos\xi}{d\omega}, \\ \varepsilon_3\cos\eta' = -(\cos\beta\sin\theta + \cos\mu\cos\theta) = \dfrac{d.\cos\eta}{d\omega}, \\ \varepsilon_3\cos\zeta' = -(\cos\gamma\sin\theta + \cos\nu\cos\theta) = \dfrac{d.\cos\zeta}{d\omega}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$
(\mathrm{X})\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{
\begin{array}{l}
d.\cos\alpha' = -(\cos\alpha\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta)d\theta \\
\qquad\qquad = \dfrac{d\theta}{d\omega}d.\cos\xi = \cos\xi' d\theta.\varepsilon_3, \\
d.\cos\beta' = -(\cos\beta\sin\theta + \cos\mu\cos\theta)d\theta \\
\qquad\qquad = \dfrac{d\theta}{d\omega}d.\cos\eta = \cos\eta' d\theta.\varepsilon_3, \\
d.\cos\gamma' = -(\cos\gamma\sin\theta + \cos\nu\cos\theta)d\theta \\
\qquad\qquad = \dfrac{d\theta}{d\omega}d.\cos\zeta = \cos\zeta' d\theta.\varepsilon_3;
\end{array}\right. \\
(2) & \left\{
\begin{array}{l}
\varepsilon_2 d.\cos\lambda' = d.\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau = \varepsilon_3\cos\xi' d\omega, \\
\varepsilon_2 d.\cos\mu' = d.\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau = \varepsilon_3\cos\eta' d\omega, \\
\varepsilon_2 d.\cos\nu' = d.\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau = \varepsilon_3\cos\zeta' d\omega;
\end{array}\right. \\
(3) & \left\{
\begin{array}{l}
\varepsilon_3 d.\cos\xi' = -\cos\alpha' d\theta - \cos\xi\, d\omega = -\cos\alpha' d\theta - \varepsilon_2\cos\lambda' d\omega, \\
\varepsilon_3 d.\cos\eta' = -\cos\beta' d\theta - \cos\eta\, d\omega = -\cos\beta' d\theta - \varepsilon_2\cos\mu' d\omega, \\
\varepsilon_3 d.\cos\zeta' = -\cos\gamma' d\theta - \cos\zeta\, d\omega = -\cos\gamma' d\theta - \varepsilon_2\cos\nu' d\omega.
\end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

$$
(\mathrm{XI})\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{
\begin{array}{l}
x' = x + l\cos\alpha', \\
y' = y + l\cos\beta', \\
z' = z + l\cos\gamma';
\end{array}\right. \\
(2) & l = \dfrac{ds\sin\theta}{d\theta}; \\
(3) & ds' = \cos\theta\, ds + dl; \\
(4) & d\sigma' = \varepsilon_3 d\theta,\quad d\tau' = \varepsilon_2\varepsilon_3 d\omega;\quad \left\}
\begin{array}{ll}
\varepsilon_2 = -\varepsilon\varepsilon'', & \text{si}\quad d\theta > 0, \\
\varepsilon_2 = \varepsilon\varepsilon'' & \text{si}\quad d\theta < 0,
\end{array}\right. \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{alors } \operatorname{tang}\theta' \text{ est positif;} \\
(5) & d\omega' = -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{d\theta^2 + d\omega^2}; \\
(6) & \operatorname{tang}\theta' = \varepsilon_2\dfrac{d\theta}{d\omega},\quad \sin\theta' = \varepsilon_3\dfrac{d\theta}{d\omega'},\quad \cos\theta' = \dfrac{d\omega}{d\omega'}\varepsilon_2\varepsilon_3.
\end{array}
\right.
$$

Nota. — Les signes ont toujours été déterminés de manière à vérifier les relations fondamentales

$$
\begin{array}{ll}
dx' = ds'\cos\alpha', & d.\cos\alpha' = \cos\xi' d\sigma, \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots, \\
d.\cos\lambda' = \cos\xi' d\tau', & d.\cos\xi' = -\cos\alpha' d\sigma' - \cos\lambda' d\tau'; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Si l'on désigne par

$$\left.\begin{array}{l}\text{T la tangente}\\ \text{N la normale}\\ \text{B la binormale}\end{array}\right\}\ \text{relatives au point M situé sur l'arête de rebroussement de la } \textit{développable donnée;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{T' la tangente}\\ \text{N' la normale}\\ \text{B' la binormale}\end{array}\right\}\ \text{relatives au point M' (correspondant de M) situé sur l'arête de rebroussement de la } \textit{développable rectifiante,}$$

on a les relations suivantes, eu égard aux formules du n° 23 :

$$(\text{XII})\quad \left\{\begin{array}{lll}\cos(T',T)=\cos\theta, & \cos(N',T)=-\varepsilon_3\sin\theta, & \cos(B',T)=0,\\ \cos(T',N)=0, & \cos(N',N)=0, & \cos(B',N)=\varepsilon_2,\\ \cos(T',B)=-\sin\theta; & \cos(N',B)=-\varepsilon_3\cos\theta; & \cos(B',B)=0.\end{array}\right.$$

La *binormale* en un point d'une courbe gauche est l'axe du plan osculateur en ce point; par *normale,* nous entendons la normale principale.

24. Les formules relatives à la développable rectifiante, que je viens d'établir, ne sont pas nouvelles; presque toutes ont été déjà données par M. de Saint-Venant (31e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* 1845); elles ont été reprises ensuite, en partie, par M. Voizot (*Journal de Mathématiques pures,* t. XV; 1850; p. 483; t. XVII; 1852, p. 253), puis par M. Frenet (*Journal de Mathématiques pures,* t. XVII; 1852; p. 445), etc.

Les démonstrations que j'ai données sont peut-être un peu plus simples que celles qui se rencontrent dans les Mémoires cités; mais, si j'ai repris la recherche des formules relatives à la développable rectifiante, c'est moins pour simplifier que pour établir très-nettement la correspondance des signes et leur signification précise, de manière à vérifier les *relations fondamentales* que j'ai rappelées plusieurs fois; de sorte que l'emploi de ces formules ne laisse subsister aucun embarras pour le choix des signes et leur interprétation, ce qui a une extrême importance dans beaucoup de questions.

NOTE I.

25. Les formules démontrées au commencement de ce Mémoire, et résumées au n° **11**, se présentent sous une forme indéterminée lorsqu'on veut les appliquer au cas où la développable est *circonscrite au cercle imaginaire de l'infini.*

Cette importante variété de surfaces développables, sur lesquelles je me propose de revenir plus tard, présente des propriétés particulières qui méritent d'être étudiées. Je me contenterai d'indiquer ici les formules initiales qui permettent d'aborder cette étude dans le système des équations tangentielles et d'y joindre quelques remarques.

1° Les génératrices de cette développable (c'est-à-dire les tangentes à l'arête de rebroussement) sont parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère.

2° Si l'on considère une génératrice quelconque, mais déterminée, le carré de la distance d'un point quelconque de cette génératrice au point où elle touche la deuxième surface à laquelle la développable est circonscrite est constamment nul.

Je n'ai pas besoin de faire observer que cette propriété est purement algébrique.

Pour démontrer ces propositions, je remarque que, d'après l'hypothèse, la surface développable en question est définie par deux équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 0, \\ f(u, v, w) = 0. \end{cases}$$

Soit (u_0, v_0, w_0) un plan tangent commun aux deux surfaces (1), ses points de contact respectifs avec chacune de ces surfaces seront

$$(2)\qquad \begin{cases} uu_0 + vv_0 + ww_0 = 0, \\ u\dfrac{df}{du_0} + v\dfrac{df}{dv_0} + w\dfrac{df}{dw_0} + \dfrac{df}{dr_0} = 0; \end{cases}$$

on a, en outre, les équations de condition

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0, \\ f(u_0, v_0, w_0) = 0. \end{cases}$$

Les deux points (2) déterminent la génératrice correspondante de la surface développable; un point quelconque de cette génératrice aura pour équation

$$(3)\qquad \left(\frac{df}{du_0}+\lambda u_0\right)u+\left(\frac{df}{dv_0}+\lambda v_0\right)v+\left(\frac{df}{dw_0}+\lambda w_0\right)w+\frac{df}{dr_0}=0,$$

λ étant une indéterminée.

Or, si l'on désigne par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point de contact du plan tangent (u_0, v_0, w_0) avec la surface $f(u, v, w)=0$, on a, d'après la seconde des équations (2),

$$(4)\qquad \frac{x_0}{\frac{df}{du_0}}=\frac{y_0}{\frac{df}{dv_0}}=\frac{z_0}{\frac{df}{dw_0}}=-\frac{1}{\frac{df}{dr_0}};$$

l'équation (3) pourra alors s'écrire

$$(5)\qquad (\mu u_0-x_0)u+(\mu v_0-y_0)v+(\mu w_0-z_0)w+1=0,$$

en représentant par μ l'indéterminée $\dfrac{\lambda}{\frac{df}{dr_0}}$.

Par conséquent, on aura, en désignant par x, y, z les coordonnées du point (5),

$$(6)\qquad x=x_0-\mu u_0,\quad y=y_0-\mu v_0,\quad z=z_0-\mu w_0;$$

ce qu'on peut écrire

$$(6\ bis)\ (G)\qquad \frac{x-x_0}{u_0}=\frac{y-y_0}{v_0}=\frac{z-z_0}{w_0}.$$

Les équations (6) définissent les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice correspondant au plan tangent fixe (u_0, v_0, w_0), pour lequel on a toujours

$$(7)\qquad u_0^2+v_0^2+w_0^2=0,\quad f(u_0, v_0, w_0)=0;$$

les équations (6 *bis*) sont les équations de cette génératrice.

Remarque. — Eu égard aux équations (7) et (4), les quantités u_0, v_0, w_0, et, par suite, les quantités x_0, y_0, z_0 peuvent être considérées comme des fonctions d'un paramètre arbitraire, t par exemple; d'après

cela, les coordonnées x, y, z, définies par les équations (6), seront des fonctions des deux variables *indépendantes* t et μ, et détermineront un point quelconque de la surface développable représentée par les équations (1). Lorsque t reste constant, le point se déplace sur la génératrice correspondant au plan tangent (u_0, v_0, w_0); si μ reste constant, le point se déplace sur une certaine courbe dont on obtiendrait les équations en éliminant t entre les trois équations (6).

1° Si l'on mène par l'origine une parallèle à la génératrice G, on aura

$$\frac{x}{u_0} = \frac{y}{v_0} = \frac{z}{w_0}, \quad \text{d'où} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

ainsi les génératrices sont parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère.

2° On déduit encore des équations (6)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \mu^2 (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2);$$

or μ n'est pas infini, car λ est arbitraire, et $\frac{df}{dt_0}$ n'est pas nul, puisque $f(u, v, w) = 0$ représente une surface quelconque; d'ailleurs

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0,$$

par suite

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0;$$

c'est la seconde des propriétés énoncées.

NOTE II.

Application des formules qui précèdent à la surface développable définie par les deux équations tangentielles

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{r^2}, \quad a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 = 1.$$

26. Les surfaces représentées par les équations tangentielles

$$(1) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{r^2}, \quad a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 = 1$$

sont un ellipsoïde rapporté à ses plans principaux et une sphère concentrique.

Nous poserons

$$(2)\quad \begin{cases} A = b^2 - c^2, & A_1 = 1 - \dfrac{a^2}{r^2}, \\ B = c^2 - a^2, & B_1 = 1 - \dfrac{b^2}{r^2}, \\ C = a^2 - b^2, & C_1 = 1 - \dfrac{c^2}{r^2}; \end{cases}$$

d'où il résulte

$$(2\ bis)\quad \begin{cases} A + B + C = 0, \\ a^2 A + b^2 B + c^2 C = 0, \\ AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0, \\ AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = -\dfrac{ABC}{r^4}. \end{cases}$$

Les deux équations (1) de la développable donnent lieu aux relations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} Bw^2 - Cv^2 = A_1, \\ Cu^2 - Aw^2 = B_1. \\ Av^2 - Bu^2 = C_1; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} A_1 u^2 + B_1 v^2 + C_1 w^2 = 0, \\ \dfrac{A_1}{A} u^4 + \dfrac{B_1}{B} v^4 + \dfrac{C_1}{C} w^4 = -\dfrac{A_1 B_1 C_1}{ABC}, \\ \dfrac{A^2 A_1}{u^2} + \dfrac{B^2 B_1}{v^2} + \dfrac{C^2 C_1}{w^2} = -\dfrac{A_1 B_1 C_1}{u^2 v^2 w^2}, \\ A_1^2 u^2 + B_1^2 v^2 + C_1^2 w^2 = -\dfrac{BC}{r^4} u^2 - \dfrac{B_1 C_1}{r^2}. \end{cases}$$

27. Des équations (1) on déduit

$$u\,du + v\,dv + w\,dw = 0, \quad a^2 u\,du + b^2 v\,dv + c^2 w\,dw = 0,$$

d'où il résulte

$$\frac{u\,du}{A} = \frac{v\,dv}{B} = \frac{w\,dw}{C}.$$

En désignant par dt la valeur commune de ces derniers rapports, on aura

$$(5)\qquad u\,du = A\,dt,\quad v\,dv = B\,dt,\quad w\,dw = C\,dt,$$

et l'on pourra regarder u, v, w comme des fonctions de la variable indépendante t.

Des égalités (5) on conclut

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} d^2u = -\dfrac{A^2}{u^3}\,dt^2, & d^3u = 3\,\dfrac{A^3}{u^5}\,dt^3, \\ d^2v = -\dfrac{B^2}{v^3}\,dt^2, & d^3v = 3\,\dfrac{B^3}{v^5}\,dt^3, \\ d^2w = -\dfrac{C^2}{w^3}\,dt^2; & d^3w = 3\,\dfrac{C^3}{w^5}\,dt^3. \end{array}\right.$$

Si maintenant nous avons égard aux notations du n° **11**, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \dfrac{A}{u}\,dt & \dfrac{B}{v}\,dt & \dfrac{C}{w}\,dt \\ -\dfrac{A^2}{u^3}\,dt^2 & -\dfrac{B^2}{v^3}\,dt^2 & -\dfrac{C^2}{w^3}\,dt^2 \end{vmatrix};$$

en ayant égard aux relations (3) et (4) du n° **26** et aux valeurs (6) qui précèdent, on trouve

$$(7)\left\{\begin{array}{l} U = \dfrac{A_1BC}{v^2w^2}\,dt^3, \\ V = \dfrac{AB_1C}{w^2u^2}\,dt^3, \\ W = \dfrac{ABC_1}{u^2v^2}\,dt^3; \end{array}\right.\quad (8)\left\{\begin{array}{l} U_2 = -\dfrac{A_1}{vw}\,dt, \\ V_2 = -\dfrac{B_1}{wu}\,dt, \\ W_2 = -\dfrac{C_1}{uv}\,dt; \end{array}\right.\quad (9)\quad \Delta = -\dfrac{A_1B_1C_1}{u^2v^2w^2}\,dt^3;$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} H = 3\,\dfrac{ABC.A_1B_1C_1}{u^2v^2w^2}\,dt^6; \\ \sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2} = \dfrac{\varepsilon_0\,dt}{uvw}\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}, \end{array}\right.$$

ε_0 désignant $+1$ ou -1 suivant que uvw est positif ou négatif, car les

radicaux qui entrent dans les formules du n° **11** doivent toujours être pris avec leur valeur absolue.

28. La substitution de ces valeurs dans les formules du n° **11** nous conduit immédiatement aux expressions suivantes :

$$\text{(I)} \qquad x = -\frac{BC}{B_1C_1}u^3, \quad y = -\frac{CA}{C_1A_1}v^3, \quad z = -\frac{AB}{A_1B_1}w^3;$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{A_1u} = \frac{dy}{B_1v} = \frac{dz}{C_1w} = -3\frac{ABC}{A_1B_1C_1}dt;$$

$$\text{(III)} \qquad ds = \varepsilon'\varepsilon_0 . 3\frac{ABC}{A_1B_1C_1}\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}\,dt;$$

$$\text{(IV)} \qquad \cos\lambda = \varepsilon . ru, \quad \cos\mu = \varepsilon . rv, \quad \cos\nu = \varepsilon . rw;$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{\cos\alpha}{A_1u} = \frac{\cos\beta}{B_1v} = \frac{\cos\gamma}{C_1w} = -\frac{\varepsilon'\varepsilon_0}{\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}};$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\cos\xi}{Avw} = \frac{\cos\eta}{Bwu} = \frac{\cos\zeta}{Cuv} = -\frac{\varepsilon''\varepsilon_0}{r\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}};$$

$$\text{(VII)} \qquad -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' . r^2T = 3\frac{ABC}{A_1B_1C_1}uvw;$$

$$\text{(VIII)} \qquad -\varepsilon''\varepsilon_0\frac{R}{r} = 3\frac{ABC}{A_1^2B_1^2C_1^2}uvw(A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$\text{(IX)} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{A_1^2B_1^2C_1^2}\left[A_1^2B^2C^2u^6 + A^2B_1^2C^2v^6 + A^2B^2C_1^2w^6\right], \\ \text{ou, en ayant égard aux relations (2) et (3),} \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - \dfrac{r^2}{A_1^2B_1^2C_1^2}\left[\dfrac{BCu^2}{r^2} + B_1C_1\right]^3; \end{array} \right.$$

les lettres ε, ε', ε'', ε_0,... représentent toujours ± 1.

29. Nous allons tirer de ces formules plusieurs conséquences.

1° *L'arête de rebroussement de la développable en question est du douzième ordre* (cas particulier d'une proposition connue).

Cherchons, en effet, combien il y a de points de la courbe dans un plan arbitrairement choisi $mx + ny + pz + q = 0$. D'après les

valeurs (I), n° **28**, et les équations (1), n° **26**, on a, entre les inconnues u, v, w, les trois équations

$$m\frac{BC}{B_1C_1}u^3 + n\frac{CA}{C_1A_1}v^3 + p\frac{AB}{A_1B_1}w^3 - q = 0,$$
$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0,$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{r^2};$$

or ce système d'équations admet $3.2.2 = 12$ solutions; la courbe est donc du douzième ordre.

30. Évaluons l'arc s.

On a, après avoir posé $\varepsilon'\varepsilon_0 = \varepsilon_1$,

$$ds = \varepsilon_1 . \frac{3ABC}{A_1B_1C_1}\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}.dt,$$

ou, en ayant égard à la dernière des relations (4) et à la première des égalités (5),

$$ds = \varepsilon_1 . \frac{3ABC}{A_1B_1C_1}\sqrt{-\frac{BC}{r^4}u^2 - \frac{B_1C_1}{r^2}}.\frac{u\,du}{A}.$$

En intégrant, il vient

$$(11) \qquad s = \text{const.} - \varepsilon_1 . \frac{r^4}{A_1B_1C_1}\left(-\frac{BC}{r^4}u^2 - \frac{B_1C_1}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou, d'après la dernière des relations (4),

$$(11\ bis) \qquad s = \text{const.} - \varepsilon_1 . \frac{r^4}{A_1B_1C_1}(A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour bien préciser les signes, supposons, par exemple,

$$(12) \qquad a > b > c \quad \text{et} \quad a > r > b;$$

il en résultera alors

$$(12\ bis) \qquad \begin{cases} A > 0, & A_1 < 0, \\ B < 0, & B_1 > 0, \\ C > 0; & C_1 > 0. \end{cases}$$

L'arête de rebroussement rencontre le plan des xy en un point réel pour lequel on a

$$(13)\qquad z = 0, \quad w = 0; \quad u^2 = \frac{B_1}{C}; \quad v^2 = \frac{-A_1}{C}.$$

Si l'on compte l'arc à partir du point situé dans le plan des xy et défini par les égalités (13), on aura

$$s = \varepsilon_1 \cdot \frac{r}{A_1 B_1 C_1}\left[(-A_1 B_1)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{-BC}{r^2}u^2 - B_1 C_1\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Si l'on suppose l'extrémité de l'arc s située dans le trièdre des coordonnées positives et qu'on ait égard aux inégalités (12 *bis*) et aux valeurs (I) du n° **28**, on voit que

$$u > 0, \quad v > 0, \quad w < 0 \quad \text{et} \quad \Delta < 0;$$

d'après la remarque II du n° **11**, on en conclura $\varepsilon' = +\varepsilon$, puis, d'après la remarque du n° **27**, $\varepsilon_0 = -1$, d'où $\varepsilon_1 = -\varepsilon'$.

Par conséquent, nous aurons

$$(14)\qquad s = \frac{-\varepsilon r}{A_1 B_1 C_1}\left[(-A_1 B_1)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{-BC}{r^2}u^2 - B_1 C_1\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

De l'égalité (14), nous tirons

$$(15)\qquad -\left(\frac{BC}{r^2}u^2 + B_1 C_1\right)^3 = \frac{A_1^2 B_1^2 C_1^2}{r^2}(s+k)^2,$$

après avoir posé

$$(15\ bis)\qquad k = \frac{+\varepsilon r(-A_1 B_1)^{\frac{3}{2}}}{A_1 B_1 C_1},$$

la longueur algébrique de s étant définie sans ambiguïté par la formule (14).

Si l'on désigne par ρ la distance du centre commun aux deux surfaces (1) au point (x, y, z) extrémité de l'arc s, on aura, par la comparaison des relations (15) et (IX),

$$(16)\qquad \rho^2 = r^2 + (s+k)^2.$$

Ainsi :

2° *En désignant par s la longueur de l'arc de l'arête de rebroussement, par ρ la distance de l'origine [centre commun des deux surfaces (1)] à l'extrémité de l'arc s, on a la relation suivante, extrêmement simple et remarquable :*

$$\rho^2 = r^2 + (s + k)^2; \tag{X}$$

la valeur de la constante k dépend de la position de l'origine de l'arc s. Dans les hypothèses où nous nous sommes placé, k a la valeur (15 *bis*).

31. Nous avons pour le *rayon de torsion* T la valeur simple, en ayant égard aux conventions faites,

$$-\varepsilon'' r^2 \mathrm{T} = 3 \frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{A_1 B_1 C_1}} uvw. \tag{XI}$$

Si l'on a égard à la dernière des relations (4), n° **26**, et à la relation (15), n° **30**, l'expression (VIII), n° **28**, du rayon de courbure R prend la forme également simple :

$$+\varepsilon''. r^3 \mathrm{R} = 3 \frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{A_1 B_1 C_1}} uvw(s + k). \tag{XII}$$

Les relations (XI) et (XII) donnent comme conséquence la suivante :

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}} = -\frac{s + k}{r}, \tag{XIII}$$

c'est-à-dire que *le rapport des rayons de courbure est proportionnel à la longueur de l'arc de la courbe.*

32. Si l'on a égard à la première des relations (4), n° **26**, savoir :

$$\mathrm{A_1} u^2 + \mathrm{B_1} v^2 + \mathrm{C_1} w^2 = 0,$$

les expressions (IV), (V), (VI) du n° **28** conduisent aux égalités sui-

vantes :

$$(17)\quad \begin{cases} A_1 \cos^2\lambda + B_1 \cos^2\mu + C_1 \cos^2\nu = 0, \\ \dfrac{\cos^2\alpha}{A_1} + \dfrac{\cos^2\beta}{B_1} + \dfrac{\cos^2\gamma}{C_1} = 0, \\ \dfrac{A^2A_1}{\cos^2\xi} + \dfrac{B^2B_1}{\cos^2\eta} + \dfrac{C^2C_1}{\cos^2\zeta} = 0. \end{cases}$$

De là résultent les propositions suivantes :

4° *Les axes des plans osculateurs sont parallèles aux génératrices du cône*

$$(\text{XIV})\qquad A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2 = 0.$$

5° *Les tangentes de l'arête de rebroussement (ou génératrices de la développable circonscrite) sont parallèles aux génératrices du cône*

$$(\text{XV})\qquad \frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} + \frac{z^2}{C_1} = 0.$$

Ces deux propositions sont conséquences l'une de l'autre; les deux cônes (XIV) et (XV) sont réciproques.

6° *Les normales principales sont parallèles aux génératrices du cône*

$$(\text{XVI})\qquad \frac{A^2A_1}{x^2} + \frac{B^2B_1}{y^2} + \frac{C^2C_1}{z^2} = 0.$$

33. Les cosinus des angles de l'axe du cône osculateur ont aussi une expression simple et remarquable; nous allons les calculer.

D'après les formules (VIII), n° **14**, les angles α', β', γ' de l'axe du cône osculateur sont définis par les égalités

$$(18)\quad \begin{cases} d\omega \cos\alpha' = \cos\alpha\, d\tau - \cos\lambda\, d\sigma, \\ d\omega \cos\beta' = \cos\beta\, d\tau - \cos\mu\, d\sigma, \\ d\omega \cos\gamma' = \cos\gamma\, d\tau - \cos\nu\, d\sigma \end{cases}$$

$$d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}.$$

On a, d'après les formules (V), n° **11**,

$$d\tau = -\varepsilon\varepsilon''.\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{u^2+v^2+w^2},\quad d\sigma = \varepsilon'\varepsilon''.\frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{U_2^2+V_2^2+W_2^2};$$

puis, en ayant égard aux relations (1), n° **26**, (9) et (10), n° **27**, (IV) et (V), n° **28**,

$$(19)\quad \begin{cases} d\tau = -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_0.\dfrac{r^2dt}{uvw}\sqrt{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2}, \\ d\sigma = -\varepsilon'\varepsilon''.\dfrac{A_1B_1C_1dt}{ruvw}.\dfrac{1}{\sqrt{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2}}; \end{cases}$$

$$\cos\lambda = \varepsilon.ru,\quad \cos\alpha = -\varepsilon'\varepsilon_0\frac{A_1u}{\sqrt{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2}}.$$

Il résulte de là

$$\frac{d\omega}{dt}.\cos\alpha' = +\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\frac{r^2.A_1u}{uvw} + \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''.\frac{A_1B_1C_1}{uvw}\frac{u}{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2},$$

ou encore

$$uvw\frac{d\omega}{dt}(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)\cos\alpha'$$
$$= \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''.A_1u[r^2(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)+B_1C_1].$$

En remplaçant $d\omega$ par sa valeur $-\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}$, il vient

$$uvw(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)\frac{\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}}{dt}\cos\alpha'$$
$$= -\varepsilon'.A_1u[r^2(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)+B_1C_1];$$

en ayant égard à la dernière des relations (4), n° **26**, le second membre de cette égalité se simplifie, et l'on a

$$(1^\circ)\quad uvw(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)\frac{\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}}{dt}\cos\alpha' = \varepsilon'\frac{A_1BC}{r^2}u^3.$$

Je remarque maintenant que les relations (19) donnent

$$\frac{d\sigma^2+d\tau^2}{dt^2} = \frac{1}{u^2v^2w^2}\left[r^4(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)+\frac{A_1^2B_1^2C_1^2}{r^2(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)}\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$(2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} & uvw(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)\frac{\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}}{dt} \\ & \quad = \frac{1}{r}\sqrt{r^6(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)^3+A_1^2B_1^2C_1^2}; \end{aligned}\right.$$

puis, en ayant égard à la dernière des relations (4), n° **26**, et à la seconde des valeurs (IX), n° **28**, on trouve

$$(3^\circ)\qquad \sqrt{r^6(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)^3+A_1^2B_1^2C_1^2} = \frac{\rho}{r}A_1B_1C_1,$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

D'après les égalités (1°), (2°) et (3°), on trouve, pour la valeur de $\cos\alpha'$,

$$\rho\cos\alpha' = \varepsilon'\frac{B_1C_1}{BC}u^3.$$

On est donc ainsi conduit aux valeurs très-simples

$$(\text{XVII})\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\cos\alpha' &= \varepsilon'\frac{BC}{B_1C_1}u^3, \\ \rho\cos\beta' &= \varepsilon'\frac{CA}{C_1A_1}v^3, \\ \rho\cos\gamma' &= \varepsilon'\frac{AB}{A_1B_1}w^3, \end{aligned}\right\}\quad \text{où}\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

lesquelles déterminent la direction de l'axe du cône droit osculateur ou la génératrice de la développable rectifiante.

En égard aux valeurs (I), n° **28**, les relations (XVII) peuvent encore s'écrire

$$(\text{XVII } bis)\quad \rho\cos\alpha' = -\varepsilon'.x,\quad \rho\cos\beta' = -\varepsilon'.y,\quad \rho\cos\gamma' = -\varepsilon'.z.$$

En tenant compte de la première des relations (4), n° **26**, on trouvera encore

$$A_1^{\frac{1}{3}}A^{\frac{2}{3}}(\cos\alpha')^{\frac{2}{3}}+B_1^{\frac{1}{3}}B^{\frac{2}{3}}(\cos\beta')^{\frac{2}{3}}+C_1^{\frac{1}{3}}C_1^{\frac{2}{3}}(\cos\gamma')^{\frac{2}{3}} = 0.$$

De là nous tirons les conséquences qui suivent :

7° *Les axes des cônes droits osculateurs passent constamment par le centre commun à la sphère et à l'ellipsoïde et décrivent le cône*

$$\text{(XVIII)} \qquad (A_1 A^2 x^2)^{\frac{1}{3}} + (B_1 B^2 y^2)^{\frac{1}{3}} + (C_1 C^2 z^2)^{\frac{1}{3}} = 0;$$

c'est-à-dire que *la développable rectifiante se réduit ici à un cône ayant pour sommet le centre de la sphère; et l'équation* (XVIII) *est précisément l'équation de ce cône.*

Ce cône est du sixième ordre et de la quatrième classe; ses équations tangentielles sont

$$\text{(XVIII } bis\text{)} \qquad r = 0, \quad \frac{A_1 A^2}{u^2} + \frac{B_1 B^2}{v^2} + \frac{C_1 C^2}{w^2} = 0;$$

il possède :

6 *arêtes de rebroussement;* 4 *arêtes doubles;* 0 *plan d'inflexion;* 3 *plans tangents doubles.*

Les six arêtes de rebroussement sont :

$$B_1 B^2 y^2 + C_1 C^2 z^2 = 0, \quad x = 0:$$

$x = 0$ est le plan tangent de rebroussement pour ces deux arêtes;

$$A_1 A^2 x^2 + C_1 C^2 z^2 = 0, \quad y = 0:$$

$y = 0$ est le plan tangent de rebroussement pour ces deux arêtes;

$$A_1 A^2 x^2 + B_1 B^2 y^2 = 0, \quad z = 0:$$

$z = 0$ est le plan tangent de rebroussement pour ces deux arêtes.

Ainsi *les plans principaux de l'ellipsoïde touchent respectivement le cône* (XVIII) *suivant deux arêtes qui sont des arêtes de rebroussement; les trois plans de rebroussement sont précisément les trois plans tangents doubles.*

Les quatre arêtes doubles sont :

$$(1°) \qquad A\sqrt{A_1}\,x = B\sqrt{B_1}\,y = C\sqrt{C_1}\,z,$$

$$(2°) \qquad -A\sqrt{A_1}\,x = B\sqrt{B_1}\,y = C\sqrt{C_1}\,z,$$

$$(3°) \qquad A\sqrt{A_1}\,x = -B\sqrt{B_1}\,y = C\sqrt{C_1}\,z,$$

$$(4°) \qquad A\sqrt{A_1}\,x = B\sqrt{B_1}\,y = -C\sqrt{C_1}\,z;$$

et les systèmes respectifs de plans tangents en chacune de ces arêtes ont pour équation :

$$(\mathrm{I}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 - BC\sqrt{B_1C_1}\,yz - CA\sqrt{C_1A_1}\,xz - AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0,$$

$$(\mathrm{II}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 - BC\sqrt{B_1C_1}\,yz - CA\sqrt{C_1A_1}\,xz + AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0,$$

$$(\mathrm{III}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 + BC\sqrt{B_1C_1}\,yz - CA\sqrt{C_1A_1}\,xz + AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0,$$

$$(\mathrm{IV}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 + BC\sqrt{B_1C_1}\,yz + CA\sqrt{C_1A_1}\,xz - AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0.$$

Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Dans le Mémoire précédent, qui avait été présenté à l'Académie dans la séance du 18 juillet 1870, j'ai donné les formules, jusqu'alors inconnues, qui permettent de déterminer les éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses deux équations tangentielles. Dans le présent Mémoire, présenté à l'Académie dans la séance du 2 octobre 1871, je m'occuperai de la détermination de la courbure en un point quelconque d'une surface définie par son équation tangentielle. Les formules que j'obtiens, et qui n'ont jamais été données, que je sache, pourront être très-utiles lorsque l'usage des coordonnées tangentielles sera plus répandu.

J'ai également résolu les deux questions suivantes :

1° Détermination des éléments d'une courbe définie par son équation tangentielle;

2° Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par son équation ponctuelle.

Ces deux questions seront l'objet d'un troisième Mémoire.

§ I.

2. Soit donnée l'équation, en coordonnées tangentielles, d'une surface (S),

$$f(u, v, w) = 0 \quad \text{ou} \quad f(u, v, w, r) = 0,$$

en rendant homogène le premier membre de cette équation; u, v, w

ou $\frac{u}{r}$, $\frac{v}{r}$, $\frac{w}{r}$ sont les coordonnées d'un plan tangent quelconque à la surface S.

Nous adopterons les notations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} f_1 = \frac{\partial f}{\partial u}, & f_2 = \frac{\partial f}{\partial v}, & f_3 = \frac{\partial f}{\partial w}, & f_4 = \frac{\partial f}{\partial r}, \\ f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, & f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, & f_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}, & f_{14} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial r}, \\ & f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, & f_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}, & f_{24} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial r}, \\ & & f_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}, & f_{34} = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial r}, \\ & & & f_{44} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}; \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \mathrm{H} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{H}_{rs} = \frac{d\mathrm{H}}{df_{rs}}.$$

On a alors les identités suivantes, où l'on a fait $r = 1$ après les différentiations :

$$uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = mf,$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} uf_{11} + vf_{12} + wf_{13} + f_{14} = (m-1)f_1, \\ uf_{21} + vf_{22} + wf_{23} + f_{24} = (m-1)f_2, \\ uf_{31} + vf_{32} + wf_{33} + f_{34} = (m-1)f_3, \\ uf_{41} + vf_{42} + wf_{43} + f_{44} = (m-1)f_4, \end{array}\right.$$

d'où

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1\mathrm{H}_{11} + f_2\mathrm{H}_{21} + f_3\mathrm{H}_{31} + f_4\mathrm{H}_{41} = \frac{\mathrm{H}}{m-1}u, \\ f_1\mathrm{H}_{12} + f_2\mathrm{H}_{22} + f_3\mathrm{H}_{32} + f_4\mathrm{H}_{42} = \frac{\mathrm{H}}{m-1}v, \\ f_1\mathrm{H}_{13} + f_2\mathrm{H}_{23} + f_3\mathrm{H}_{33} + f_4\mathrm{H}_{43} = \frac{\mathrm{H}}{m-1}w, \\ f_1\mathrm{H}_{14} + f_2\mathrm{H}_{24} + f_3\mathrm{H}_{34} + f_4\mathrm{H}_{44} = \frac{\mathrm{H}}{m-1}, \end{array}\right.$$

en supposant que m est le degré d'homogénéité de la fonction de f rendue homogène.

5. Si maintenant (u, v, w) est un plan tangent à la surface S, le point de contact de ce plan aura pour équation

$$Uf_1 + Vf_2 + Wf_3 + f_4 = 0,$$

avec la condition

$$uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = 0; \tag{4}$$

U, V, W sont les coordonnées tangentielles variables. D'après cela, les coordonnées x, y, z de ce point seront

$$x = -\frac{f_1}{f_4}, \quad y = -\frac{f_2}{f_4}, \quad z = -\frac{f_3}{f_4}. \tag{5}$$

Si a, b, c sont les angles, avec les axes de coordonnées supposés rectangulaires, de la normale à la surface au point $M(x, y, z)$, on aura

$$\frac{\cos a}{u} = \frac{\cos b}{v} = \frac{\cos c}{w} = \frac{1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}. \tag{6}$$

Considérons une tangente MT dans le plan tangent (u, v, w), et désignons par α, β, γ les angles de cette tangente avec les axes de coordonnées, on devra avoir l'équation de condition

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \tag{7}$$

qui exprime que cette tangente est parallèle au plan (u, v, w).

En désignant par X, Y, Z les coordonnées variables d'un point de l'espace, on trouve facilement, pour l'équation du plan passant par cette tangente et par la normale MN en M,

$$M(X - x) + N(Y - y) + P(Z - z) = 0, \tag{8}$$

après avoir posé

$$\left\{\begin{aligned} M &= v\cos\gamma - w\cos\beta, \\ N &= w\cos\alpha - u\cos\gamma, \\ P &= u\cos\beta - v\cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Si l'on considère trois points consécutifs M, M′, M″ de la section de la surface par le plan TMN, les coordonnées

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z, \\ x+dx, & y+dy, & z+dz, \\ x+dx+\frac{1}{2}d^2x, & y+dy+\frac{1}{2}d^2y, & z+dz+\frac{1}{2}d^2z \end{array}$$

de ces trois points devront vérifier l'équation (8); on est ainsi conduit aux deux équations de condition

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz = 0, \\ \mathrm{M}\,d^2x + \mathrm{N}\,d^2y + \mathrm{P}\,d^2z = 0; \end{array}\right.$$

et le rayon de courbure en M de la section normale TMN aura pour valeur

$$(11)\qquad \mathrm{R} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}.$$

Il s'agit d'exprimer cette dernière quantité en fonction de u, v, w et des dérivées de la fonction $f(u, v, w)$.

4. Lorsqu'un point se déplace suivant une courbe tracée sur la surface f, les coordonnées u, v, w du plan tangent correspondant sont liées par deux relations; nous pourrons donc, pour cette courbe, regarder u, v, w comme des fonctions d'un paramètre arbitraire t; il est entendu que les *différentielles* que nous emploierons dans ce qui va suivre se rapporteront à la variation de l'arbitraire t.

Dans cette hypothèse, on a

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} df_1 = f_{11}\,du + f_{12}\,dv + f_{13}\,dw, \\ df_2 = f_{21}\,du + f_{22}\,dv + f_{23}\,dw, \\ df_3 = f_{31}\,du + f_{32}\,dv + f_{33}\,dw, \\ df_4 = f_{41}\,du + f_{42}\,dv + f_{43}\,dw; \end{array}\right.$$

de là on déduit, en multipliant par H_{1r}, H_{2r}, H_{3r}, H_{4r}, et ajoutant,

$$(12\,bis)\quad \begin{cases} H_{11}df_1 + H_{21}df_2 + H_{31}df_3 + H_{41}df_4 = H\,du, \\ H_{12}df_1 + H_{22}df_2 + H_{32}df_3 + H_{42}df_4 = H\,dv, \\ H_{13}df_1 + H_{23}df_2 + H_{33}df_3 + H_{43}df_4 = H\,dw, \\ H_{14}df_1 + H_{24}df_2 + H_{34}df_3 + H_{44}df_4 = 0. \end{cases}$$

Nous poserons ensuite

$$(13)\quad \begin{cases} A = f_1df_4 - f_4df_1, \\ B = f_2df_4 - f_4df_2, \\ C = f_3df_4 - f_4df_3; \end{cases} \qquad (13\,bis)\quad \begin{cases} A' = f_2df_3 - f_3df_2, \\ B' = f_3df_1 - f_1df_3, \\ C' = f_1df_2 - f_2df_1; \end{cases}$$

du groupe (13) on déduit

$$(14)\quad \begin{cases} dA = f_1d^2f_4 - f_4d^2f_1, \\ dB = f_2d^2f_4 - f_4d^2f_2, \\ dC = f_3d^2f_4 - f_4d^2f_3. \end{cases}$$

Ces notations admises, des expressions (5), n° 3, précédemment trouvées

$$x = -\frac{f_1}{f_4},\quad y = -\frac{f_2}{f_4},\quad z = -\frac{f_3}{f_4},$$

on conclut les valeurs qui suivent pour dx, dy, dz; d^2x, d^2y, d^2z :

$$(15)\quad \begin{cases} dx = \frac{A}{f_4^2}, \\ dy = \frac{B}{f_4^2}, \\ dz = \frac{C}{f_4^2}, \end{cases} \qquad (15\,bis)\quad \begin{cases} d^2x = \frac{dA}{f_4^2} - 2\frac{A}{f_4^3}df_4, \\ d^2y = \frac{dB}{f_4^2} - 2\frac{B}{f_4^3}df_4, \\ d^2z = \frac{dC}{f_4^2} - 2\frac{C}{f_4^3}df_4. \end{cases}$$

L'expression (11) du rayon de courbure R prend alors la forme

$$(16)\qquad f_4^2R = \frac{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}}.$$

5. Il nous faut maintenant calculer le numérateur et le dénomina-

teur de cette dernière fraction en supposant que les trois points consécutifs M, M′, M″ sont dans le plan normal TMN.

On a, dans cette hypothèse, à satisfaire aux relations

$$(17)\quad \begin{cases} 1^\circ) & u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \\ 2^\circ) & \mathrm{MA} + \mathrm{NB} + \mathrm{PC} = 0, \\ 3^\circ) & \mathrm{M}dA + \mathrm{N}dB + \mathrm{P}dC = 0, \\ 4^\circ) & uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = 0, \\ 5^\circ) & f_1du + f_2dv + f_3dw = 0, \\ 6^\circ) & d(f_1du + f_2dv + f_3dw) = 0. \end{cases}$$

La relation 1°) exprime que la tangente (α, β, γ) est dans le plan (u, v, w); les égalités 2°) et 3°) expriment que les points M′, M″ sont dans le plan normal TMN, c'est-à-dire que les valeurs (15) et (15 *bis*) vérifient respectivement la première et la seconde des relations (10); les égalités 4°), 5°), 6°) expriment que u, v, w, et leurs variations du premier et du second ordre satisfont à l'équation $f(u, v, w) = 0$ de la surface donnée.

Écrivons à part les égalités 1°) et 4°), savoir :

$$(17\ bis)\quad \begin{cases} u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \\ uf_1 + vf_2 + wf_3 + f_4 = 0, \end{cases}$$

qui interviendront fréquemment dans les transformations que nous aurons à effectuer.

6. Pour calculer le *numérateur* de l'expression (16), nous utiliserons d'abord les relations 2°) et 5°) du groupe (17), savoir :

$$f_1du + f_2dv + f_3dw = 0,$$
$$\mathrm{MA} + \mathrm{NB} + \mathrm{PC} = 0.$$

Eu égard aux identités (3) du n° 2 et aux valeurs (12) du n° 4, la première des équations qui précèdent pourra s'écrire

$$udf_1 + vdf_2 + wdf_3 + df_4 = 0;$$

quant à la seconde, elle devient, en y remplaçant A, B, C par leurs valeurs (13),

$$(\mathrm{M}f_1 + \mathrm{N}f_2 + \mathrm{P}f_3)df_4 - f_4(\mathrm{M}df_1 + \mathrm{N}df_2 + \mathrm{P}df_3) = 0;$$

puis, en mettant pour df_4 la valeur fournie par l'équation précédente, et pour f_4 la valeur que donne la seconde des équations (17 *bis*), on trouve, en tenant compte de la première des équations (17 *bis*),

$$\mathrm{M}'df_1 + \mathrm{N}'df_2 + \mathrm{P}'df_3 = 0,$$

après avoir posé

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}' = f_3\cos\beta - f_2\cos\gamma, \\ \mathrm{N}' = f_1\cos\gamma - f_3\cos\alpha, \\ \mathrm{P}' = f_2\cos\alpha - f_1\cos\beta. \end{cases}$$

On constate aisément que

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}'\cos\alpha + \mathrm{N}'\cos\beta + \mathrm{P}'\cos\gamma = 0, \\ u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}' = f_1\mathrm{M} + f_2\mathrm{N} + f_3\mathrm{P}; \end{cases}$$

$$(19\ bis)\qquad \begin{cases} w\mathrm{N}' - v\mathrm{P}' = f_4\cos\alpha, \\ u\mathrm{P}' - w\mathrm{M}' = f_4\cos\beta, \\ v\mathrm{M}' - u\mathrm{N}' = f_4\cos\gamma. \end{cases}$$

En joignant aux égalités 2°) et 5°) que nous venons de transformer la quatrième relation du groupe (12 *bis*), on a le système des trois équations

$$(20)\qquad \begin{cases} u\,df_1 + v\,df_2 + w\,df_3 = -df_4, \\ \mathrm{M}'df_1 + \mathrm{N}'df_2 + \mathrm{P}'df_3 = 0, \\ \mathrm{H}_{14}df_1 + \mathrm{H}_{24}df_2 + \mathrm{H}_{34}df_3 = -\mathrm{H}_{44}df_4. \end{cases}$$

Si maintenant on résout ces trois équations par rapport à df_1, df_2, df_3, on trouve, pour df_1 par exemple,

$$df_1 \begin{vmatrix} u & v & w \\ \mathrm{M}' & \mathrm{N}' & \mathrm{P}' \\ \mathrm{H}_{14} & \mathrm{H}_{24} & \mathrm{H}_{34} \end{vmatrix} = -df_4 \begin{vmatrix} 1 & v & w \\ 0 & \mathrm{N}' & \mathrm{P}' \\ \mathrm{H}_{14} & \mathrm{H}_{24} & \mathrm{H}_{34} \end{vmatrix};$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} df_4[H_{14}(vP' - wN') + H_{24}(wM' - uP') + H_{34}(uN' - vM')] \\ = - df_4[H_{44}(vP' - wN') - P'H_{24} + N'H_{34}]; \end{aligned}$$

puis, en ayant égard aux relations (19 *bis*) et aux valeurs (18),

$$\begin{aligned} f_4 df_4(H_{14}\cos\alpha + H_{24}\cos\beta + H_{34}\cos\gamma) \\ = df_4[-f_1 H_{44}\cos\alpha - f_2 H_{24}\cos\alpha - f_3 H_{34}\cos\alpha \\ + f_4 H_{24}\cos\beta + f_4 H_{34}\cos\gamma]; \end{aligned}$$

si l'on tient compte de la dernière des identités (3 *bis*), il vient enfin

$$\begin{aligned} f_4 df_4(H_{14}\cos\alpha + H_{24}\cos\beta + H_{34}\cos\gamma) \\ = f_4 df_4(H_{14}\cos\alpha + H_{24}\cos\beta + H_{34}\cos\gamma) - \frac{H}{m-1}\cos\alpha\, df_4. \end{aligned}$$

De sorte que, si l'on pose

$$(21) \qquad K = \frac{\frac{H}{m-1}}{H_{14}\cos\alpha + H_{24}\cos\beta + H_{34}\cos\gamma}\, df_4,$$

on obtient ainsi la première des relations du groupe (22) :

$$(22) \qquad \begin{cases} A = f_4 df_4 - f_4 df_1 = K\cos\alpha, \\ B = f_2 df_4 - f_4 df_2 = K\cos\beta, \\ C = f_3 df_4 - f_4 df_3 = K\cos\gamma; \end{cases}$$

d'où

$$(22\ bis) \qquad \begin{cases} df_1 = \frac{f_1}{f_4} df_4 - \frac{K}{f_4}\cos\alpha, \\ df_2 = \frac{f_2}{f_4} df_4 - \frac{K}{f_4}\cos\beta, \\ df_3 = \frac{f_3}{f_4} df_4 - \frac{K}{f_4}\cos\gamma. \end{cases}$$

Des égalités (22) on déduit

$$A^2 + B^2 + C^2 = K^2,$$

ou

$$(23) \qquad (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}} = K^3.$$

7. Passons maintenant au calcul du *dénominateur* de l'expression (16).

Il nous faut d'abord introduire les relations (3°) et (6°) du groupe (17), savoir :

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}dA + \mathrm{N}dB + \mathrm{P}dC = 0, \\ d[f_1 du + f_2 dv + f_3 dw] = 0, \end{cases}$$

ou

$$d[u df_1 + v df_2 + w df_3 + df_4] = 0.$$

On peut écrire la deuxième égalité sous la seconde forme indiquée, puisque $(f_1 du + f_2 dv + f_3 dw)$ et $(u df_1 + v df_2 + w df_3 + df_4)$ sont, à un facteur numérique près, des expressions identiques.

En substituant à dA, dB, dC leurs valeurs (14), on mettra la première des égalités (24) sous la forme

$$(25)\qquad (\mathrm{M}f_1 + \mathrm{N}f_2 + \mathrm{P}f_3)d^2 f_4 - f_4(\mathrm{M}d^2 f_1 + \mathrm{N}d^2 f_2 + \mathrm{P}d^2 f_3) = 0,$$

ou encore, d'après la seconde des relations (19),

$$(25\,bis)\qquad (u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}')d^2 f_4 - f_4(\mathrm{M}d^2 f_1 + \mathrm{N}d^2 f_2 + \mathrm{P}d^2 f_3) = 0.$$

Quant à la seconde des relations (24), elle devient d'abord, en effectuant la différentiation indiquée,

$$(26)\qquad u d^2 f_1 + v d^2 f_2 + w d^2 f_3 + d^2 f_4 + du df_1 + dv df_2 + dw df_3 = 0.$$

Calculons la quantité $(du df_1 + dv df_2 + dw df_3)$.

Nous obtiendrons d'abord du, dv, dw en remplaçant, dans les équations (12 *bis*), df_1, df_2, df_3 par leurs valeurs (22 *bis*); on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{H}du = {} & \mathrm{H}_{11}\left(\frac{f_1}{f_4} df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\alpha\right) + \mathrm{H}_{21}\left(\frac{f_2}{f_4} df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\beta\right) \\ & + \mathrm{H}_{31}\left(\frac{f_3}{f_4} df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\gamma\right) + \mathrm{H}_{41} df_4, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{H}du = {} & \frac{df_4}{f_4}(\mathrm{H}_{11} f_1 + \mathrm{H}_{21} f_2 + \mathrm{H}_{31} f_3 + \mathrm{H}_{41} f_4) \\ & - \frac{\mathrm{K}}{f_4}(\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma); \end{aligned}$$

ou, en ayant égard à la première des identités (3 *bis*),

$$f_4 \mathrm{H} du = \frac{\mathrm{H}}{m-1} u df_4 - \mathrm{K}(\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma).$$

On trouvera de cette manière les valeurs suivantes pour du, dv, dw :

$$f_4 du = \frac{df_4}{m-1} u - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}(\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma),$$

$$f_4 dv = \frac{df_4}{m-1} v - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}(\mathrm{H}_{12}\cos\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos\beta + \mathrm{H}_{32}\cos\gamma),$$

$$f_4 dw = \frac{df_4}{m-1} w - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}(\mathrm{H}_{13}\cos\alpha + \mathrm{H}_{23}\cos\beta + \mathrm{H}_{33}\cos\gamma).$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} & f_4(du\,df_1 + dv\,df_2 + dw\,df_3) \\ & \quad = \frac{df_4}{m-1}(u\,df_1 + v\,df_2 + w\,df_3) \\ & \quad - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left\{\begin{array}{l} + (\mathrm{H}_{11}\cos\alpha + \mathrm{H}_{21}\cos\beta + \mathrm{H}_{31}\cos\gamma)\left(\frac{f_1}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\alpha\right) \\ + (\mathrm{H}_{12}\cos\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos\beta + \mathrm{H}_{32}\cos\gamma)\left(\frac{f_2}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\beta\right) \\ + (\mathrm{H}_{13}\cos\alpha + \mathrm{H}_{23}\cos\beta + \mathrm{H}_{33}\cos\gamma)\left(\frac{f_3}{f_4}df_4 - \frac{\mathrm{K}}{f_4}\cos\gamma\right) \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

ou, en ayant égard à la première des égalités (20) et aux identités (3 *bis*),

$$\begin{aligned} & f_4(du\,df_1 + dv\,df_2 + dw\,df_3) \\ & \quad = -\frac{df_4^2}{m-1} - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\frac{df_4}{f_4}\left[\cos\alpha\left(\frac{\mathrm{H}}{m-1}u - f_4\mathrm{H}_{41}\right) + \cos\beta\left(\frac{\mathrm{H}}{m-1}v - f_4\mathrm{H}_{42}\right)\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \cos\gamma\left(\frac{\mathrm{H}}{m-1}w - f_4\mathrm{H}_{43}\right)\right] \\ & \quad + \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{H}f_4}(\mathrm{H}_{11}\cos^2\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos^2\beta + \mathrm{H}_{33}\cos^2\gamma \\ & \qquad + 2\mathrm{H}_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\mathrm{H}_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2\mathrm{H}_{23}\cos\beta\cos\gamma). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta = \mathrm{H}_{11}\cos^2\alpha + \mathrm{H}_{22}\cos^2\beta + \mathrm{H}_{33}\cos^2\gamma \\ \qquad + 2\mathrm{H}_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\mathrm{H}_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2\mathrm{H}_{23}\cos\beta\cos\gamma, \end{array}\right.$$

et qu'on ait égard à la première des relations (17 *bis*) et à la valeur (21) de K, l'égalité précédente devient

$$f_4(du\,df_1 + dv\,df_2 + dw\,df_3) = -\frac{df_4^2}{m-1} + \frac{df_4^2}{m-1} + \frac{K^2}{Hf_4}\Delta,$$

et, par suite, l'équation (26) prend la forme définitive

$$(28)\qquad u\,d^2f_1 + v\,d^2f_2 + w\,d^2f_3 + d^2f_4 + \frac{K^2}{Hf_4^2}\Delta = 0.$$

8. Ceci établi, passons au calcul des binômes $(B\,dC - C\,dB), \ldots$. Les valeurs (13), (13 *bis*) et (14) nous donnent d'abord

$$\begin{aligned} B\,dC - C\,dB &= f_4[\;\;C\,d^2f_2 - B\,d^2f_3 + A'\,d^2f_4],\\ C\,dA - A\,dC &= f_4[-C\,d^2f_1 + A\,d^2f_3 + B'\,d^2f_4],\\ A\,dB - B\,dA &= f_4[+B\,d^2f_1 - A\,d^2f_2 + C'\,d^2f_4]; \end{aligned}$$

mais on a, d'après les égalités (22),

$$(29)\qquad A = K\cos\alpha,\quad B = K\cos\beta,\quad C = K\cos\gamma;$$

de plus, en substituant les valeurs (22 *bis*) dans les équations (13 *bis*), on trouve, en égard aux notations (18),

$$(29\ bis)\qquad A' = \frac{K}{f_4}M',\quad B' = \frac{K}{f_4}N',\quad C' = \frac{K}{f_4}P'.$$

D'après cela, il résulte

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} B\,dC - C\,dB &= Kf_4(\cos\gamma\,d^2f_2 - \cos\beta\,d^2f_3) + KM'\,d^2f_4,\\ C\,dA - A\,dC &= Kf_4(\cos\alpha\,d^2f_3 - \cos\gamma\,d^2f_1) + KN'\,d^2f_4,\\ A\,dB - B\,dA &= Kf_4(\cos\beta\,d^2f_1 - \cos\alpha\,d^2f_2) + KP'\,d^2f_4. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, de l'égalité (25 *bis*) tirons la valeur de d^2f_4 et substituons-la dans les expressions qui précèdent; on trouve, après quelques réductions d'une extrême facilité, où l'on fait intervenir les nota-

tions (9), (18) et les relations (19),

$$(31)\quad \begin{cases} \mathrm{B}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{B} = \mathrm{K}f_4\mathrm{M}\dfrac{\mathrm{M}'d^2f_1 + \mathrm{N}'d^2f_2 + \mathrm{P}'d^2f_3}{u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}'}, \\ \mathrm{C}d\mathrm{A} - \mathrm{A}d\mathrm{C} = \mathrm{K}f_4\mathrm{N}\dfrac{\mathrm{M}'d^2f_1 + \mathrm{N}'d^2f_2 + \mathrm{P}'d^2f_3}{u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}'}, \\ \mathrm{A}d\mathrm{B} - \mathrm{B}d\mathrm{A} = \mathrm{K}f_4\mathrm{P}\dfrac{\mathrm{M}'d^2f_1 + \mathrm{N}'d^2f_2 + \mathrm{P}'d^2f_3}{u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}'}. \end{cases}$$

Enfin, substituant dans l'égalité (28) la valeur de d^2f_4 tirée de l'équation (25) ou (25 *bis*), il vient

$$\begin{aligned}&(ud^2f_1 + vd^2f_2 + wd^2f_3)(\mathrm{M}f_1 + \mathrm{N}f_2 + \mathrm{P}f_3)\\ &\quad + f_4(\mathrm{M}d^2f_1 + \mathrm{N}d^2f_2 + \mathrm{P}d^2f_3) + \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{H}f_4^2}\Delta(u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}') = 0;\end{aligned}$$

ou, en réduisant les termes des deux premiers groupes après avoir remplacé f_4 par $-(uf_1 + vf_2 + wf_3)$, puis en ayant égard aux valeurs (9) de M, N, P et à la première des relations (17 *bis*),

$$(32)\quad \begin{cases} (\mathrm{M}'d^2f_1 + \mathrm{N}'d^2f_2 + \mathrm{P}'d^2f_3)(u^2 + v^2 + w^2) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{H}f_4^2}\Delta(u\mathrm{M}' + v\mathrm{N}' + w\mathrm{P}') = 0. \end{cases}$$

Si, dans les égalités (31), on remplace $(\mathrm{M}'d^2f_1 + \mathrm{N}'d^2f_2 + \mathrm{P}'d^2f_3)$ par la valeur que fournit l'équation (32), on a définitivement

$$(33)\quad \begin{cases} \mathrm{B}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{B} = -\dfrac{\mathrm{K}^3\Delta}{\mathrm{H}f_4(u^2 + v^2 + w^2)}\mathrm{M}, \\ \mathrm{C}d\mathrm{A} - \mathrm{A}d\mathrm{C} = -\dfrac{\mathrm{K}^3\Delta}{\mathrm{H}f_4(u^2 + v^2 + w^2)}\mathrm{N}, \\ \mathrm{A}d\mathrm{B} - \mathrm{B}d\mathrm{A} = -\dfrac{\mathrm{K}^3\Delta}{\mathrm{H}f_4(u^2 + v^2 + w^2)}\mathrm{P}. \end{cases}$$

Mais les valeurs (9) donnent

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 + \mathrm{P}^2\\ &\quad = (u^2 + v^2 + w^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2,\end{aligned}$$

ou, d'après la première des relations (17 *bis*),

$$(34)\qquad M^2 + N^2 + P^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

On déduit alors des égalités (33) et (34)

$$(35)\qquad \sqrt{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2} = \frac{K^3\Delta}{H f_4 \sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

9. La substitution des valeurs (23) et (35) dans l'expression (16) de R donne définitivement

$$(36)\qquad R = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{f_4}\cdot\frac{H}{\Delta},$$

ou, en remplaçant les lettres H et Δ par les valeurs qu'elles désignent,

$$(36\ bis)\qquad R = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{f_4}\cdot\frac{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}}{H_{11}\cos^2\alpha + H_{22}\cos^2\beta + H_{33}\cos^2\gamma + 2H_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2H_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2H_{23}\cos\beta\cos\gamma},$$

ce qu'on peut encore écrire comme il suit :

$$(36\ ter)\qquad R = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{f_4}\cdot\frac{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \cos\alpha \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \cos\beta \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \cos\gamma \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 & 0 \end{vmatrix}};$$

il ne faut pas oublier qu'on doit toujours vérifier les deux relations

$$(37)\qquad \begin{cases} u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{cases}$$

Nous arrivons donc à cette conclusion :

Si l'on considère un plan tangent quelconque (u, v, w) *à la surface donnée et le point de contact* M *de ce plan, le rayon de courbure, en* M, *de la section faite par un plan normal passant par la tangente* $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *sera donné par la formule* (36 *bis*) *ou son équivalente* (36 *ter*).

10. Il est maintenant facile d'obtenir les rayons de courbure principaux, c'est-à-dire les valeurs maximum et minimum de R, lorsque α, β, γ varient de manière à vérifier toujours les relations (37).

Posons

$$\rho = \frac{H\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{R\,f_1}, \tag{38}$$

l'équation (36 *bis*) pourra s'écrire

$$\begin{aligned} &H_{11}\cos^2\alpha + H_{22}\cos^2\beta + H_{33}\cos^2\gamma \\ &\quad + 2H_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2H_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2H_{23}\cos\beta\cos\gamma \\ &= \rho(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma), \end{aligned}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} &(H_{11} - \rho)\cos^2\alpha + (H_{22} - \rho)\cos^2\beta + (H_{33} - \rho)\cos^2\gamma \\ &\quad + 2H_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2H_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2H_{23}\cos\beta\cos\gamma = 0. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Il s'agit d'avoir le maximum ou le minimum de ρ, en supposant les variables $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ liées par la relation

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0. \tag{40}$$

En appliquant ici les règles connues, on est conduit aux égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(H_{11} - \rho)\cos\alpha + H_{12}\cos\beta + H_{13}\cos\gamma}{u} \\ &= \frac{H_{21}\cos\alpha + (H_{22} - \rho)\cos\beta + H_{23}\cos\gamma}{v} \\ &= \frac{H_{31}\cos\alpha + H_{32}\cos\beta + (H_{33} - \rho)\cos\gamma}{w}. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Si l'on désigne par λ la valeur commune de ces rapports, on a les équations

$$(41\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(H_{11}-\rho)\cos\alpha + H_{12}\cos\beta + H_{13}\cos\gamma - \lambda u = 0,\\ &H_{21}\cos\alpha + (H_{22}-\rho)\cos\beta + H_{23}\cos\gamma - \lambda v = 0,\\ &H_{31}\cos\alpha + H_{32}\cos\beta + (H_{33}-\rho)\cos\gamma - \lambda w = 0,\\ &\qquad u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0; \end{aligned}\right.$$

l'élimination de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, λ, entre ces équations donne

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} H_{11}-\rho & H_{12} & H_{13} & u\\ H_{21} & H_{22}-\rho & H_{23} & v\\ H_{31} & H_{32} & H_{33}-\rho & w\\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe l'équation (42), on trouve

$$(42\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho^3(u^2+v^2+w^2)\\ &-\rho\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & u\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & v\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & w\\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & 0\\ u & v & w & 0 & 0 \end{vmatrix} + (u^2+v^2+w^2)(H_{11}+H_{22}+H_{33}) \end{aligned}\right\}$$
$$-(m-1)^2 f_4^2 . H = 0,$$

après avoir remarqué qu'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & u\\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & v\\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & w\\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = (m-1)^2 f_4^2 . H.$$

Cette identité peut se démontrer comme il suit : on a

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & u \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & v \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & w \\ v & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m-1}{H} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \frac{H}{m-1} u - f_1 H_{11} - f_2 H_{12} - f_3 H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \frac{H}{m-1} v - f_1 H_{21} - f_2 H_{22} - f_3 H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & \frac{H}{m-1} w - f_1 H_{31} - f_2 H_{32} - f_3 H_{33} \\ u & v & w & - f_1 u - f_2 v - f_3 w \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(m-1) f_1}{H} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ u & v & w & 1 \end{vmatrix},$$

en ayant égard aux identités (3 *bis*). On aura de même

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} & u \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} & v \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & w \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m-1}{H} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} & \frac{H}{m-1} u - f_1 H_{11} - f_2 H_{21} - f_3 H_{31} \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} & \frac{H}{m-1} v - f_1 H_{12} - f_2 H_{22} - f_3 H_{32} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & \frac{H}{m-1} w - f_1 H_{13} - f_2 H_{23} - f_3 H_{33} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & \frac{H}{m-1} - f_1 H_{14} - f_2 H_{24} - f_3 H_{34} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(m-1) f_1}{H} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} & H_{41} \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} & H_{42} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{43} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} \end{vmatrix} = \frac{(m-1) f_1 . H^3}{H};$$

d'où résulte immédiatement l'identité en question.

Ainsi :

Les valeurs de ρ (38), *correspondant aux deux rayons de courbure principaux, seront données par l'équation* (42) *ou l'équation* (42 *bis*); *les directions des sections principales seront déterminées par les équations* (41) *après la substitution de la valeur correspondante de* ρ.

Il est facile de démontrer, à l'aide des relations (41 *bis*), que les deux directions des sections principales sont rectangulaires; on opère, comme dans le cas analogue, des cordes principales dans les surfaces du second ordre.

Remarquons encore que :

Le produit des rayons de courbure principaux R_1, R_2 *est donné par la formule*

$$(43)\qquad R_1 R_2 = -\frac{(u^2+v^2+w^2)}{(m-1)^2 f_4^4}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}.$$

Remarque. — On pourrait se proposer de chercher les conditions, pour qu'un point soit un ombilic, de déterminer les directions des lignes asymptotiques,...; je laisserai de côté toutes ces questions, dont la solution ne saurait d'ailleurs présenter aucune difficulté maintenant; je me contenterai d'avoir résolu la question fondamentale pour cette théorie, et d'indiquer plus loin la recherche des centres de courbure.

§ II.

11. Dans le paragraphe précédent, j'ai résolu la question que je m'étais proposée en introduisant les dérivées partielles du premier membre de l'équation qui définit la surface donnée; on a pu constater que les formules ainsi obtenues étaient remarquables par leur symétrie.

L'équation de la surface établit une relation entre les trois variables u, v, w, de sorte qu'on peut regarder l'une d'elles, w par exemple, comme une fonction déterminée des deux autres, u et v, qui seraient alors des variables indépendantes.

Or, dans un grand nombre de circonstances, il peut être avantageux, indispensable même, de se placer à ce dernier point de vue. Quoique les formules qu'on obtient alors soient bien moins élégantes que les premières, je crois cependant qu'il est nécessaire de les établir. C'est ce que je vais faire en abordant la question directement, sans tenir compte des résultats précédemment acquis.

12. Regardons donc w comme une fonction déterminée des deux variables u et v, et posons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{\partial w}{\partial u},\\ q &= \frac{\partial w}{\partial v},\\ r &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u},\\ s &= \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u},\\ t &= \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial q}{\partial v}; \end{aligned}\right.$$

on aura alors

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dw &= p\,du + q\,dv,\\ dp &= r\,du + s\,dv,\\ dq &= s\,du + t\,dv, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(2\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} du &= \frac{t\,dp - s\,dq}{rt - s^2},\\ dv &= \frac{-s\,dp + r\,dq}{rt - s^2}. \end{aligned}\right.$$

Soient u, v, w les coordonnées d'un plan tangent fixe et M son point de contact, l'équation de ce point sera

$$p(\mathrm{U} - u) + q(\mathrm{V} - v) - (\mathrm{W} - w) = 0,$$

U, V, W étant les coordonnées tangentielles courantes; les coordonnées x, y, z du point M sont alors

$$(3)\qquad x = \frac{p}{pu + qv - w},\quad y = \frac{q}{pu + qv - w},\quad z = -\frac{1}{pu + qv - w}.$$

15. Si le point se déplace sur une courbe tracée sur la surface, les coordonnées u, v, w du plan tangent correspondant varieront respectivement suivant une loi déterminée, de sorte qu'on pourra les considérer comme des fonctions d'une certaine arbitraire; c'est à la variation de cette arbitraire que se rapporteront les différentielles que nous emploierons dans la suite.

Différentions donc les équations (3); on trouve

$$(4)\qquad dx = \frac{A}{D^2},\quad dy = \frac{B}{D^2},\quad dz = \frac{C}{D^2},$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2x &= \frac{dA}{D^2} - 2\frac{A}{D^3}\,dD,\\ d^2y &= \frac{dB}{D^2} - 2\frac{B}{D^3}\,dD,\\ d^2z &= \frac{dC}{D^2} - 2\frac{C}{D^3}\,dD,\end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$(6)\qquad D = pu + qv - w,$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= (qv - w)\,dp - pv\,dq,\\ B &= -qu\,dp + (pu - w)\,dp,\\ C &= u\,dp + v\,dq.\end{aligned}\right.$$

Or, si α, β, γ sont les angles, avec les axes de coordonnées, d'une tangente située dans le plan tangent (u, v, w), et si les trois points consécutifs M, M′, M″ correspondant aux coordonnées

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z,\\ x + dx, & y + dy, & z + dz,\\ x + dx + \frac{1}{2}d^2x, & y + dy + \frac{1}{2}d^2y, & z + dz + \frac{1}{2}d^2z \end{array}$$

sont situés dans le plan normal passant par cette tangente, les différentielles (4) et (5) doivent vérifier les équations (10), n° **5**, de sorte qu'on aura les équations de condition

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} MA + NB + PC &= 0,\\ M\,dA + N\,dB + P\,dC &= 0.\end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$(9)\qquad \begin{cases} M = v\cos\gamma - w\cos\beta, \\ N = w\cos\alpha - u\cos\gamma, \\ P = u\cos\beta - v\cos\alpha; \end{cases}$$

on a toujours

$$(9\,bis)\qquad \begin{cases} u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{cases}$$

D'après la formule (11) du n° **3** et les valeurs (4) et (5) du n° **13**, le rayon de courbure R de cette section normale sera donné par la nouvelle formule

$$(10)\qquad R = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}{D^2\sqrt{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}}.$$

Il nous reste à calculer maintenant le numérateur et le dénominateur de cette dernière expression.

14. Calcul du *numérateur* de l'expression (10) de R.

Ayons d'abord égard à la première des relations (8); en y remplaçant A, B, C par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} &M[(qv - w)\,dp - pv\,dq] \\ &\quad + N[-qu\,dp + (pu - w)\,dq] + P(u\,dp + v\,dq) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$dp[q(Mv - Nu) + Pu - Mw] + dq[p(Nu - Mv) + Pv - Nw] = 0.$$

Or on a, d'après les valeurs (9) et (9 *bis*),

$$(11)\qquad \begin{cases} vP - wN = -(u^2 + v^2 + w^2)\cos\alpha, \\ wM - uP = -(u^2 + v^2 + w^2)\cos\beta, \\ uN - vM = -(u^2 + v^2 + w^2)\cos\gamma, \end{cases}$$

et l'égalité qui précède devient

$$dp(q\cos\gamma + \cos\beta) = dq(p\cos\gamma + \cos\alpha).$$

Nous sommes ainsi conduits à la relation

$$(12)\qquad \frac{dp}{\cos\alpha + p\cos\gamma} = \frac{dq}{\cos\beta + q\cos\gamma} = d\lambda,$$

d'où

$$dp = (\cos\alpha + p\cos\gamma)\,d\lambda,$$
$$dq = (\cos\beta + q\cos\gamma)\,d\lambda.$$

D'après cela, les valeurs (7) de A, B, C deviennent, eu égard aux relations (9 *bis*) et à la notation (6),

$$(13)\qquad \begin{cases} A = D\cos\alpha\,d\lambda, \\ B = D\cos\beta\,d\lambda, \\ C = D\cos\gamma\,d\lambda; \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$(14)\qquad (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}} = D^3.d\lambda^3.$$

15. Passons maintenant au calcul du *dénominateur* de l'expression (10).

La différentiation des équations (7) nous donne

$$(15)\qquad \begin{cases} dA = -p(du\,dp + dv\,dq) + (qv - w)\,d^2p - pv\,d^2q, \\ dB = -q(du\,dp + dv\,dq) - qu\,d^2p + (pu - w)\,d^2q, \\ dC = \qquad (du\,dp + dv\,dq) + u\,d^2p + v\,d^2q. \end{cases}$$

Or, si l'on pose

$$(16)\quad G = \frac{t(\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 - 2s(\cos\alpha + p\cos\gamma)(\cos\beta + q\cos\gamma) + r(\cos\beta + q\cos\gamma)^2}{rt - s^2},$$

on trouve, eu égard aux valeurs (2 *bis*) et (12),

$$(17)\qquad du\,dp + dv\,dq = G\,d\lambda^2.$$

Par suite,

$$(18)\qquad \begin{cases} dA = -pG\,d\lambda^2 + (qv - w)\,d^2p - pv\,d^2q, \\ dB = -qG\,d\lambda^2 - qu\,d^2p + (pu - w)\,d^2q, \\ dC = \qquad G\,d\lambda^2 + \quad u\,d^2p + v\,d^2q; \end{cases}$$

et si l'on introduit les valeurs (13), on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
\frac{B\,dC - C\,dB}{D\,d\lambda} &= (\cos\beta + q\cos\gamma)\,G\,d\lambda^2 \\
&\quad + u[(\cos\beta + q\cos\gamma)\,d^2p - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\,d^2q], \\
\frac{C\,dA - A\,dC}{D\,d\lambda} &= -(\cos\alpha + p\cos\gamma)\,G\,d\lambda^2 \\
&\quad + v[(\cos\beta + q\cos\gamma)\,d^2p - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\,d^2q], \\
\frac{A\,dB - B\,dA}{D\,d\lambda} &= (p\cos\beta - q\cos\alpha)\,G\,d\lambda^2 \\
&\quad + w[(\cos\beta + q\cos\gamma)\,d^2p - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\,d^2q].
\end{aligned}$$

Si l'on pose, pour un instant,

$$(19)\qquad (\cos\beta + q\cos\gamma)\,d^2p - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\,d^2q = \mu,$$

il vient

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
B\,dC - C\,dB &= D\,d\lambda\,[\quad(\cos\beta + q\cos\gamma)\,G\,d\lambda^2 + \mu u], \\
C\,dA - A\,dC &= D\,d\lambda\,[-(\cos\alpha + p\cos\gamma)\,G\,d\lambda^2 + \mu v], \\
A\,dB - B\,dA &= D\,d\lambda\,[\,(p\cos\beta - q\cos\alpha)\,G\,d\lambda^2 + \mu w].
\end{aligned}\right.$$

Ayons égard maintenant à la seconde des équations de condition (8); en y substituant les valeurs (18), on trouve

$$\begin{aligned}
G\,d\lambda^2(-pM - qN + P) &+ d^2p[M(qv - w) - quN + uP] \\
&+ d^2q\,[-pvM + (pu - w)\,N + vP] = 0,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
G\,d\lambda^2(-pM - qN + P) &+ d^2p[q(vM - uN) + uP - wM] \\
&+ d^2q[p(uN - vM) + vP - wN] = 0,
\end{aligned}$$

ou, d'après les relations (11) et la notation (19),

$$G\,d\lambda^2(-pM - qN + P) + \mu(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

De là on déduit

$$(21)\qquad \mu = \frac{(pM + qN - P)}{u^2 + v^2 + w^2)}\,G\,d\lambda^2,$$

et les égalités (20) deviennent alors

$$(22)\quad \begin{cases} \mathrm{B}\,d\mathrm{C} - \mathrm{C}\,d\mathrm{B} = \mathrm{DG}\,d\lambda^3 \left[\dfrac{p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P}}{u^2+v^2+w^2}\,u + (\cos\beta + q\cos\gamma)\right], \\ \mathrm{C}\,d\mathrm{A} - \mathrm{A}\,d\mathrm{C} = \mathrm{DG}\,d\lambda^3 \left[\dfrac{p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P}}{u^2+v^2+w^2}\,v - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\right], \\ \mathrm{A}\,d\mathrm{B} - \mathrm{B}\,d\mathrm{A} = \mathrm{DG}\,d\lambda^3 \left[\dfrac{p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P}}{u^2+v^2+w^2}\,w + (p\cos\beta - q\cos\alpha)\right]. \end{cases}$$

La somme des carrés des quantités entre parenthèses est

$$\frac{(p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P})^2}{u^2+v^2+w^2} + 2\frac{p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P}}{u^2+v^2+w^2}(u\cos\beta + qu\cos\gamma - v\cos\alpha - pv\cos\gamma + wp\cos\beta - wq\cos\alpha)$$
$$+ (\cos\beta + q\cos\gamma)^2 + (\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 + (p\cos\beta - q\cos\alpha)^2;$$

or le terme du milieu, eu égard aux notations (9), se réduit à

$$+ 2\frac{p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P}}{u^2+v^2+w^2}(-p\mathrm{M} - q\mathrm{N} + \mathrm{P});$$

il reste par conséquent

$$-\frac{(p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P})^2}{u^2+v^2+w^2} + (\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 + (\cos\beta + q\cos\gamma)^2 + (p\cos\beta - q\cos\alpha)^2,$$

ou encore

$$\frac{(u^2+v^2+w^2)[p^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + q^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) - 2pq\cos\alpha\cos\beta + 2p\cos\alpha\cos\gamma + 2q\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta] - (p\mathrm{M}+q\mathrm{N}-\mathrm{P})^2}{u^2+v^2+w^2}.$$

Mais le numérateur de cette dernière fraction peut s'écrire

$$\begin{aligned} & p^2[(u^2+v^2+w^2)(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) - \mathrm{M}^2] \\ & + q^2[(u^2+v^2+w^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) - \mathrm{N}^2] \\ & + [(u^2+v^2+w^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - \mathrm{P}^2] \\ & - 2pq[(u^2+v^2+w^2)\cos\alpha\cos\beta + \mathrm{MN}] \\ & + 2p[(u^2+v^2+w^2)\cos\alpha\cos\gamma + \mathrm{MP}] \\ & + 2q[(u^2+v^2+w^2)\cos\beta\cos\gamma + \mathrm{NP}], \end{aligned}$$

expression qui, en égard aux relations (9 *bis*), se réduit à

$$p^2u^2 + q^2v^2 + w^2 + 2pquv - 2puw - 2qvw = (pu + qv - w)^2 = D^2.$$

On a donc définitivement

$$(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2 = \frac{D^2G^2d\lambda^6}{u^2 + v^2 + w^2},$$

ou enfin

$$(23)\quad \sqrt{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2} = \frac{D^2G}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,d\lambda^3.$$

16. Si l'on remplace, dans l'expression (10), les radicaux par leurs valeurs (14) et (23), il vient

$$R = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{DG};$$

c'est-à-dire enfin

$$(24)\quad R = \frac{(rt - s^2)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{(pu + qv - w)[t(\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 - 2s(\cos\alpha + p\cos\gamma)(\cos\beta + q\cos\gamma) + r(\cos\beta + q\cos\gamma)^2]};$$

on a toujours à vérifier les deux relations

$$(25)\quad \begin{cases} u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, *si l'on considère un plan tangent quelconque* (u, v, w), *et que* M *soit son point de contact, le rayon de courbure, en* M, *de la section faite par un plan normal passant par la tangente* $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *sera donné par la formule* (24).

17. Il nous est maintenant facile de déterminer les rayons de courbure principaux.

Si l'on pose

$$(26)\quad \rho = \frac{(rt - s^2)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{D.R},$$

l'équation (24) pourra s'écrire

$$t(\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 - 2s(\cos\alpha + p\cos\gamma)(\cos\beta + q\cos\gamma) + r(\cos\beta + q\cos\gamma)^2 = \rho(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

ou encore

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} (t-\rho)\cos^2\alpha + (r-\rho)\cos^2\beta + (tp^2 - 2spq + rq^2 - \rho)\cos^2\gamma \\ \quad - 2s\cos\alpha\cos\beta + 2(tp - sq)\cos\alpha\cos\gamma + 2(rq - sp)\cos\beta\cos\gamma = 0; \end{array}\right.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ doivent vérifier la relation

$$(27\ bis)\qquad u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0.$$

En appliquant ici les règles connues pour la recherche des valeurs maximum et minimum, on est conduit aux égalités

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(t-\rho)\cos\alpha - s\cos\beta + (tp - sq)\cos\gamma}{u} \\ = \dfrac{-s\cos\alpha + (r-\rho)\cos\beta + (rq - sp)\cos\gamma}{v} \\ = \dfrac{(tp - sq)\cos\alpha + (rq - sp)\cos\beta + (tp^2 - 2spq + rq^2 - \rho)\cos\gamma}{w}. \end{array}\right.$$

En désignant par k la valeur commune de ces rapports, puis éliminant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ entre les équations ainsi obtenues et la première des relations (25), on trouve

$$\begin{vmatrix} t-\rho & -s & tp - sq & u \\ -s & r-\rho & rq - sp & v \\ tp - sq & rp - sp & tp^2 - 2spq + rq^2 - \rho & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe cette dernière équation, il vient définitivement

$$(29)\quad \rho^2(u^2 + v^2 + w^2) - (\mathrm{T}r - 2\mathrm{S}s + \mathrm{R}t)\rho + (pu + qv - w)^2(rt - s^2) = 0,$$

après avoir posé

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{T} = (qv - w)^2 + u^2(q^2 + 1), \\ \mathrm{R} = (pu - w)^2 + v^2(p^2 + 1), \\ \mathrm{S} = pv(pv - w) + qu(pu - w) - uv. \end{array}\right.$$

Ainsi, *les valeurs de* ρ (26), *correspondant aux deux rayons de courbure principaux, seront données par l'équation* (29); *les directions des sections principales seront déterminées par les équations* (28) et (25) *après la substitution de la valeur correspondante de* ρ.

On trouve facilement pour le produit des rayons de courbure principaux

$$R_1 R_2 = \frac{(rt - s^2)(u^2 + v^2 + w^2)^2}{(pu + qv - w)^4}. \tag{31}$$

18. Il est utile ici de chercher les conditions pour que le point de contact d'un plan tangent (u, v, w) soit un *ombilic* de la surface.

Pour cela, nous écrirons la valeur (24) de R sous la forme

$$R = \frac{(rt - s^2)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{pu + qv - w} \times \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{t(\cos\alpha + p\cos\gamma)^2 - 2s(\cos\alpha + p\cos\gamma)(\cos\beta + q\cos\gamma) + r(\cos\beta + q\cos\gamma)^2};$$

puis nous poserons

$$\frac{\cos\alpha + p\cos\gamma}{\cos\beta + q\cos\gamma} = \lambda;$$

d'où

$$\cos\alpha - \lambda\cos\beta = (\lambda q - p)\cos\gamma;$$

si l'on joint à cette équation la relation

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,$$

on en tire

$$\cos\alpha = \frac{\lambda(qv - w) - pv}{\lambda u + v}\cos\gamma, \quad \cos\beta = \frac{-qu\lambda + pu - w}{\lambda u + v}\cos\gamma;$$

d'où

$$\cos\alpha + p\cos\gamma = \frac{D}{\lambda u + v}\lambda\cos\gamma, \quad \cos\beta + q\cos\gamma = \frac{D}{\lambda u + v}\cos\gamma.$$

L'expression de R devient alors

$$R = \frac{(rt - s^2)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{D^2}\,\frac{[\lambda(qv - w) - pv]^2 + [-qu\lambda + pu - w]^2 + (\lambda u + v)^2}{t\lambda^2 - 2s\lambda + r}.$$

Pour que le point considéré soit un ombilic, il faut que la valeur de R reste invariable lorsque λ varie; on est ainsi conduit aux conditions

$$\frac{(qv-w)^2+u^2(q^2+1)}{t}=\frac{pv(qv-w)+qu(pu-w)-uv}{s}=\frac{(pu-w)^2+v^2(p^2+1)}{r}.$$

Par conséquent, *les conditions nécessaires pour que le point de contact du plan tangent* (u, v, w) *soit un* ombilic *de la surface sont*

$$\frac{R}{r}=\frac{S}{s}=\frac{T}{t}, \tag{32}$$

les quantités R, S, T *étant définies par les égalités* (30).

19. *Remarque.* — Si la surface considérée était une surface développable, les formules que nous venons d'établir, soit dans le premier paragraphe, soit dans le second, ne pourraient plus s'appliquer; c'est qu'en effet, dans le système des coordonnées tangentielles, une surface développable exige deux équations, et non plus une seule, pour être définie.

Le cas d'une surface développable définie par une seule équation ponctuelle et celui d'une courbe définie par une seule équation tangentielle seront l'objet d'un troisième Mémoire.

§ III.

Équation des centres de courbure principaux.

Ces calculs doivent faire suite à ceux du premier paragraphe.

20. Les équations ponctuelles de la normale en M sont

$$\frac{X-x}{u}=\frac{Y-y}{v}=\frac{Z-z}{w},$$

X, Y, Z étant les coordonnées variables; d'où, en désignant par θ la

valeur commune de ces rapports,

$$(44)\qquad \begin{cases} X = x + \theta u, \\ Y = y + \theta v, \\ Z = z + \theta w. \end{cases}$$

Si X, Y, Z sont regardées maintenant comme les coordonnées du point de rencontre de cette normale avec la normale infiniment voisine, ces quantités ne varient pas lorsqu'on fait varier le paramètre arbitraire dont dépendent u, v, w, et par suite x, y, z; on a donc, d'après cela,

$$(45)\qquad dx+\theta du+ud\theta=0,\quad dy+\theta dv+vd\theta=0,\quad dz+\theta dw+wd\theta=0.$$

Multiplions ces équations respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et ajoutons; il vient

$$(46)\qquad \begin{cases} (dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma) \\ \quad + \theta(\cos\alpha\, du + \cos\beta\, dv + \cos\gamma\, dw) = 0, \end{cases}$$

puisque la quantité $(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)$ est nulle.

Ayant égard aux relations (15), n° **4**, (22), n° **6**, et aux valeurs de du, dv, dw, écrites au n° **7** et à la notation (27), l'égalité précédente devient

$$\frac{K}{f_1^2} + \theta\left[\frac{df_1}{(m-1)f_1}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) - \frac{K}{Hf_1}\Delta\right] = 0,$$

égalité qui se réduit à

$$(47)\qquad \theta = \frac{H}{f_1\Delta},$$

où l'on a

$$(47\ bis)\qquad \begin{cases} \Delta = H_{11}\cos^2\alpha + H_{22}\cos^2\beta + H_{33}\cos^2\gamma \\ \quad + 2H_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2H_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2H_{23}\cos\beta\cos\gamma. \end{cases}$$

21. Pour que les relations (45) soient complétement vérifiées, il faut qu'on ait

$$\frac{dx+\theta du}{u} = \frac{dy+\theta dv}{v} = \frac{dz+\theta dw}{w};$$

en ayant encore égard aux relations (15), n° **4**, et (22), n° **6**, puis aux valeurs de du, dv, dw, n° **7**, ces dernières équations deviennent

$$\frac{\dfrac{K\cos\alpha}{f_4^2} + \theta\left[\dfrac{H}{m-1}\dfrac{df_4}{f_4}u - \dfrac{K}{f_4 H}(H_{11}\cos\alpha + H_{12}\cos\beta + H_{13}\cos\gamma)\right]}{u}$$

$$= \frac{\dfrac{K\cos\beta}{f_4^2} + \theta\left[\dfrac{H}{m-1}\dfrac{df_4}{f_4}v - \dfrac{K}{f_4 H}(H_{21}\cos\alpha + H_{22}\cos\beta + H_{23}\cos\gamma)\right]}{v}$$

$$= \frac{\dfrac{K\cos\gamma}{f_4^2} + \theta\left[\dfrac{H}{m-1}\dfrac{df}{f_4}w - \dfrac{K}{f_4 H}(H_{31}\cos\alpha + H_{32}\cos\beta + H_{33}\cos\gamma)\right]}{w}.$$

Or ces égalités se réduisent évidemment à

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\left(H_{11} - \dfrac{H}{f_4\theta}\right)\cos\alpha + H_{12}\cos\beta + H_{13}\cos\gamma}{u} \\ &= \frac{H_{21}\cos\alpha + \left(H_{22} - \dfrac{H}{f_4\theta}\right)\cos\beta + H_{23}\cos\gamma}{v} \\ &= \frac{H_{31}\cos\alpha + H_{32}\cos\beta + \left(H_{33} - \dfrac{H}{f_4\theta}\right)\cos\gamma}{w}. \end{aligned}\right.$$

L'identité de ces équations avec les équations (41) du n° **10** est manifeste; car, si l'on a égard à la valeur (47) de θ, on voit que

$$\frac{H}{f_4\theta} = \Delta;$$

d'un autre côté, si l'on multiplie les équations (41 *bis*), n° **10**, par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ respectivement et qu'on ajoute, il vient, comme cela doit être d'après les égalités (36) et (38),

$$\rho = \Delta.$$

Nous retrouvons ainsi les directions des sections principales.

22. D'après cela, ρ *étant une quelconque des racines de l'équa-*

tion (42) *ou* (42 *bis*), n° **10**, *les coordonnées* X, Y, Z *du centre de courbure correspondant seront*

$$(49)\quad \begin{cases} X = \dfrac{H}{f_4\rho}u - \dfrac{f_1}{f_4} = \dfrac{Hu - \rho f_1}{\rho f_4}, \\ Y = \dfrac{H}{f_4\rho}v - \dfrac{f_2}{f_4} = \dfrac{Hv - \rho f_2}{\rho f_4}, \\ Z = \dfrac{H}{f_4\rho}w - \dfrac{f_3}{f_4} = \dfrac{Hw - \rho f_3}{\rho f_4}; \end{cases}$$

et l'équation tangentielle de ce centre de courbure sera

$$(50)\quad H(Uu + Vv + Ww) - \rho(Uf_1 + Vf_2 + Wf_3 + f_4) = 0,$$

U, V, W *désignant les coordonnées tangentielles variables.*

Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles de la Physique mathématique;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Désignons par u une fonction des trois coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point ou seulement de ses deux coordonnées x et y, selon que la question que l'on traite se rapporte à trois ou à deux dimensions, et posons

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \quad \text{ou} \quad = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Les principales équations aux différences partielles que l'on rencontre dans la Physique mathématique sont les suivantes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad \Delta\Delta u = 0, \quad \Delta u = -a^2 u, \\ \dfrac{du}{dt} = a^2 \Delta u, \quad \dfrac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \Delta u, \end{array} \right.$$

dans lesquelles t désigne le temps. La fonction u, qui représente une température, un potentiel ou un déplacement moléculaire, satisfait à une de ces équations dans l'intérieur d'un corps terminé par une surface σ ou dans l'intérieur d'une surface plane limitée par une ligne s. De plus, u et ses dérivées du premier ordre doivent varier d'une manière continue dans cet espace.

Laplace considéra le premier l'équation $\Delta u = 0$, et reconnut que le potentiel d'une masse quelconque extérieure à un certain volume satisfait à cette équation dans l'intérieur de ce volume. Toutefois, l'expression analytique de ce potentiel ne pouvait encore être consi-

dérée comme l'intégrale générale de cette équation; mais cette intégrale est donnée par le théorème suivant :

Toute fonction u de x, y, z qui satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ dans l'intérieur d'un volume terminé par une surface σ, et qui varie dans cet espace d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, peut être considérée comme le potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur la surface σ.

Ainsi l'intégrale de $\Delta u = 0$ est

$$\int \frac{\rho}{r} d\sigma,$$

r étant la distance d'un point quelconque (x, y, z) intérieur à σ à un point (α, β, γ) situé sur l'élément $d\sigma$ de la surface, et ρ une fonction arbitraire de α, β, γ. On peut concevoir un système de coordonnées dans lequel la surface σ soit représentée par la constance d'une des trois coordonnées, et alors ρ est une fonction arbitraire des deux coordonnées restantes.

Comme l'électricité se distribue à la surface des corps, ce théorème se présente fort naturellement dans la théorie de l'électricité statique; aussi était-il évidemment connu de Poisson, le créateur de cette théorie; mais c'est à Green que l'on doit de l'avoir énoncé avec précision et de l'avoir démontré dans son Mémoire sur l'électricité.

On voit par là, une fois de plus, combien la démonstration des phénomènes physiques est de nature à perfectionner l'Analyse.

Ensuite, dans un Mémoire inséré dans ce Journal (tome XIV, 1869) et qui est relatif à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$, j'ai donné l'intégrale générale de cette équation qui est établie par le théorème suivant :

Toute fonction u qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur d'une surface σ, et qui y est continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur σ et du second potentiel d'une semblable couche distribuée sur la même surface.

Dans le Mémoire actuel, je me propose de trouver les intégrales générales des autres équations aux différences partielles de la Physique mathématique dans des corps de forme quelconque, en les supposant continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Ainsi, par exemple, si une fonction u satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

dans l'intérieur d'une surface σ et satisfait aux conditions précédentes de continuité, elle est donnée par la formule

$$(3) \qquad u = \int \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} f(r + 2a\varepsilon\sqrt{t}, \theta, \psi)\, e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon\, d\sigma,$$

f étant une fonction arbitraire de trois quantités, r la distance du point (x, y, z) intérieur à σ à l'élément $d\sigma$, et θ, ψ étant deux coordonnées propres à déterminer un point de cette surface.

En général, s'il s'agit de questions d'équilibre, pour les résoudre complétement il faudra se donner une ou deux conditions à la surface; s'il s'agit au contraire de questions dans lesquelles entre le temps, il faudra en plus se donner une ou deux conditions initiales.

Il est évident qu'à l'aide de nos formules on ne pourra immédiatement résoudre toutes ces questions, et que la détermination des fonctions arbitraires qui y entrent pourra présenter beaucoup de difficultés; mais, indépendamment de l'intérêt théorique qu'elles présentent, nos formules pourront être utiles dans un grand nombre de circonstances.

C'est ce que l'on peut reconnaître d'après mon Mémoire sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$; car, après avoir donné l'intégrale générale de cette équation au moyen de fonctions arbitraires, j'en ai fait des applications, et j'ai montré comment on pouvait en conclure complétement l'intégrale dans des cas particuliers, c'est-à-dire déterminer les fonctions arbitraires.

On doit encore remarquer que l'on n'est parvenu à intégrer les équations (1) que dans des cas très-particuliers de la surface σ ou de la ligne s qui limitent le corps ou la surface plane dont on s'occupe.

Nos formules, au contraire, sont applicables quelle que soit la surface σ ou la ligne s et quand même on n'en connaîtrait pas la définition géométrique. Ainsi imaginons un corps isotrope terminé par une surface quelconque σ, sa température satisfera à l'équation (2) et sera donnée par la formule (3). Prenons pour f différentes formes de fonctions, nous aurons autant de distributions possibles de température, et l'on pourra dans chacune d'elles déterminer l'état initial et l'état de la surface; puis, en retournant ces questions, on pourra supposer donnés l'état initial et la température de la surface et déterminer la température en un point quelconque du corps. Cette méthode inverse d'intégration appliquée à nos formules pourrait servir à résoudre au moins approximativement des questions proposées. C'est d'ailleurs ce que l'on peut voir par l'usage que M. de Saint-Venant a fait de la méthode inverse d'intégration dans son beau Mémoire sur la torsion des prismes. (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XIX, 1856.)

De différentes expressions analytiques qui satisfont aux équations aux différences partielles de la Physique.

1. Considérons d'abord la plus simple des équations de la Physique mathématique

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

et désignons par

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

le carré de la distance du point (x, y, z) à un point fixe (a, b, c). Nous allons nous proposer d'abord de trouver une fonction de r qui satisfasse à l'équation (1).

Transportons les axes de coordonnées rectangulaires parallèlement à eux-mêmes au point (a, b, c), et si nous désignons encore par x, y, z les trois coordonnées dans ce nouveau système, l'équation (1) ne changera pas. Prenons ensuite des coordonnées sphériques ayant leur

centre au point (a, b, c), et nous aurons

$$\frac{d\left(r^2 \frac{du}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\psi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left(\frac{du}{d\theta}\sin\theta\right)}{d\theta} = 0,$$

θ étant l'angle de r avec un axe fixe mené par le centre et ψ l'angle formé par le plan de cet axe et de r avec un plan fixe mené par l'axe.

Si u ne dépend que de r, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$u = \frac{C}{r} + C',$$

C et C′ étant des constantes.

D'après cela, désignons par $d\varpi$ l'élément d'un volume ϖ, par (a, b, c) les coordonnées d'un point de cet élément, et par ρ une fonction de a, b, c; l'expression

$$\text{(A)} \qquad \int \frac{\rho}{r} d\varpi,$$

dans laquelle l'intégration s'étend à tous les éléments du volume ϖ, satisfait à l'équation (1) en dehors du volume ϖ, puisque chaque élément de l'intégrale y satisfait.

Ainsi se présente l'expression du potentiel. On sait que Laplace la considéra d'abord et vérifia qu'elle satisfait à l'équation (1). Mais nous avons voulu commencer par appliquer à une question connue la méthode qui nous servira dans ce qui va suivre.

Si nous imaginons que la matière soit distribuée sur une surface σ au lieu de remplir un volume ϖ, nous aurons, au lieu de l'expression précédente, l'intégrale

$$\text{(B)} \qquad \int \frac{\rho}{r} d\sigma,$$

(a, b, c) étant un point de l'élément de surface $d\sigma$ et l'intégrale s'é-

tendant à tous les éléments de la surface; ρ, fonction de a, b, c, représente la densité de la matière multipliée par l'épaisseur infiniment mince de la couche et s'appelle simplement la *densité*.

Passons au cas où l'équation (1) se réduit à deux variables et devient

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \tag{2}$$

Faisons alors

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

et cherchons une fonction de r qui satisfasse à l'équation (2). Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point (a, b), l'équation (2) ne changera pas; puis prenons des coordonnées polaires, en posant

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha;$$

l'équation (2) deviendra

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 u}{dz^2} = 0,$$

et si u ne dépend que de r, on a

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0,$$

et par suite

$$u = \mathrm{C}\log r + \mathrm{C}',$$

C et C′ étant des constantes.

D'après cela, si l'on désigne par $d\omega$ l'élément d'une surface plane ou par ds l'élément d'une courbe qui limite cette surface, et par (a, b) les coordonnées rectangulaires de l'élément $d\omega$ ou ds, les expressions

$$\int \log r\,\rho\, d\omega, \quad \int \log r\,\rho\, ds, \tag{C}$$

dans lesquelles ρ est fonction de (a, b), satisferont à l'équation (2).

2. Au lieu de commencer par supposer que la solution de l'équation (1) ne dépend que de r, imaginons qu'elle ne dépende que de θ, angle de r avec une droite fixe, nous aurons

$$\frac{d\left(\frac{du}{d\theta}\sin\theta\right)}{d\theta} = 0,$$

et par suite

$$u = C \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} + C'.$$

On en peut conclure que les expressions

$$u = \int \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\rho\, d\varpi, \quad u = \int \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\rho\, d\sigma,$$

où l'on adopte les mêmes notations que dans les formules (A) et (B), satisfont à l'équation (1).

On voit de même que les expressions

$$u = \int \alpha\rho\, d\omega, \quad u = \int \alpha\rho\, ds,$$

où l'on adopte les notations des formules (C) et où α est l'angle de r avec une droite fixe, sont des intégrales de l'équation (2).

3. Considérons ensuite l'équation

$$\Delta\Delta u = 0. \tag{3}$$

Cherchons les fonctions de la distance r du point (x, y, z) au point (a, b, c) qui satisfont à cette équation. Transportons encore l'origine des coordonnées au point (a, b, c), et cette équation ne changera pas. Posons ensuite

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = v,$$

et l'équation (3) se réduira à

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0,$$

ou, en remplaçant v, à

$$\frac{d^4u}{dr^4} + \frac{4}{r}\frac{d^3u}{dr^3} = 0.$$

L'intégrale de cette équation différentielle est

$$u = Cr + C'r^2 + \frac{C''}{r} + C'''.$$

En particulier, $\frac{1}{r}$ et r satisfont à l'équation (3), et l'on en conclut que l'expression

$$\int r\rho\, d\varpi,$$

qui s'appelle le *second potentiel* de la masse $\int \rho\, d\varpi$ par rapport au point (x, y, z), satisfait à l'équation (3) en dehors de cette masse.

Nous avons d'ailleurs démontré, dans notre Mémoire sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$ (t. XIV de ce *Journal*, 2e série), le théorème suivant : *Toute fonction u qui satisfait à l'équation $\Delta\Delta u = 0$ dans l'intérieur d'une surface σ et qui y est continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche de matière distribuée sur σ et du second potentiel d'une autre couche distribuée sur la même surface.*

Examinons le cas où l'équation (3) ne renferme que les deux coordonnées rectangulaires x, y et se réduit à

$$(4) \qquad \frac{d^4u}{dx^4} + 2\frac{d^4u}{dx^2dy^2} + \frac{d^4u}{dy^4} = 0.$$

Cherchons les fonctions qui satisfont à cette équation et qui ne dépendent que de

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point (a, b), et en posant

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = v,$$

l'équation (4) deviendra

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = 0.$$

On tire de là

$$r\frac{dv}{dr} = C, \qquad v = C\log r + C',$$

$$r\frac{du}{dr} = C\int r\log r\,dr + \frac{C'r^2}{2} + C'',$$

et, comme on a

$$\int r\log r\,dr = \frac{r^2}{2}\left(\log r - \frac{1}{2}\right),$$

on en conclut facilement

$$u = Ar^2\log r + Br^2 + C\log r + D,$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. Ainsi les deux expressions

$$\int r^2\log r\,\rho\,d\omega, \quad \int r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right)\rho\,d\omega,$$

dans lesquelles $d\omega$ est l'élément d'une surface plane ω et ρ une fonction de a, b coordonnées de $d\omega$, et dont nous avons appelé la dernière le *second potentiel* dans le Mémoire cité, satisfont à l'équation (4).

Nous avons donné aussi, dans ce Mémoire, l'intégrale générale de l'équation (4) au moyen d'un théorème semblable à celui que nous venons d'énoncer pour l'équation (3).

4. Occupons-nous maintenant de l'équation

$$(5) \qquad \Delta u = -\alpha^2 u.$$

En supposant que u ne soit fonction que de r, et transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point (a, b, c), on a

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = -\alpha^2 u,$$

ou

$$(a) \qquad \frac{d^2(ru)}{dr^2} + \alpha^2(ru) = 0.$$

et l'on en conclut, en désignant par C et C′ deux constantes arbitraires,

$$u = \frac{C \sin \alpha r + C' \cos \alpha r}{r}.$$

Imaginons des masses m, m', m'',... qui se réduisent à des points matériels ou dont les volumes sont infiniment petits; désignons par (a, b, c) les coordonnées d'une quelconque de ces masses; alors r sera la distance de cette masse au point (x, y, z). Puisque $\frac{\cos \alpha r}{r}$ est une solution de l'équation (5), on satisfera également à cette équation en posant

$$u = \Sigma m \frac{\cos \alpha r}{r},$$

le signe Σ de sommation s'étendant à toutes les masses m, m', m'',.... On pourrait faire sur cette expression une théorie toute semblable à celle qui a été donnée par Gauss et Green pour le potentiel; et, en y faisant $\alpha = 0$, on aurait la théorie même du potentiel.

Nous démontrerons d'ailleurs dans ce Mémoire le théorème suivant, qui fournit l'intégrale générale de l'équation (5) :

Toute fonction qui satisfait à l'équation

$$\Delta u = -\alpha^2 u$$

dans l'intérieur d'une surface σ et qui y varie d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, peut être donnée par la formule

$$(b) \qquad \int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma,$$

(a, b, c) étant les coordonnées de l'élément $d\sigma$ de la surface, ρ une fonction de a, b, c et r la distance du point (x, y, z) à $d\sigma$.

En faisant $\alpha = 0$, on a un théorème connu (Mémoire sur l'équation $\Delta \Delta u = 0$, t. XIV de ce *Journal*, p. 380).

Il est bon de rappeler comment l'équation (5) se présente dans les questions de Physique. On a l'équation

$$\frac{dv}{dt} = m^2 \Delta v,$$

qui régit la température d'un corps solide, dont nous supposerons la surface σ entretenue à la température zéro ou rayonnant dans l'espace, ou on a l'équation

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = m^2 \Delta v,$$

qui régit les petits mouvements d'un gaz enfermé dans la même surface. Alors on pose l'une des deux formules

$$(c) \qquad v = e^{-\alpha^2 m^2 t} u,$$

$$(d) \qquad v = (\mathrm{A} \sin \alpha m t + \mathrm{B} \cos \alpha m t) u,$$

et l'on obtient

$$\Delta u = -\alpha^2 u.$$

α est une quantité que l'on détermine par la condition que l'on ait sur la surface σ

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn} = lu,$$

l étant une constante et du l'élément de la normale à la surface σ. La quantité v est la somme d'une infinité de solutions telles que (c) et (d), que l'on appelle *solutions simples*. Mais la quantité u de la solution simple n'est pas l'intégrale générale de $\Delta u = -\alpha^2 u$, elle n'en est qu'un cas particulier; ainsi, pour l'obtenir, il faut donner dans l'expression (b) à ρ une forme particulière.

Examinons le cas où u ne dépend pas de z et où l'équation (5) se réduit à

$$(6) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = -\alpha^2 u.$$

On a, au lieu de l'équation (a),

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = -\alpha^2 u,$$

et l'intégrale de cette équation est

$$\mathrm{C}\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega + \mathrm{C}'\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega)\, d\omega.$$

Posons

$$N = \int_0^{2\pi} \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2 \omega)\, d\omega;$$

nous démontrerons plus loin le théorème suivant :

Toute fonction qui satisfait à l'équation (6) *dans l'intérieur d'une ligne s et qui y varie d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, est exprimée par la formule*

$$\int N \rho\, ds,$$

ρ étant une fonction de a, b, coordonnées de l'élément ds, et r la distance du point (x, y) à l'élément ds.

L'équation (6) se présente de la même manière que (5) dans les questions de Physique mathématique.

5. Considérons l'équation

$$(7) \qquad \frac{d^4 u}{dx^4} + 2\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 u}{dy^4} = \alpha^4 u,$$

que l'on obtient en posant

$$v = u(A \sin \alpha^2 mt + B \cos \alpha^2 mt)$$

dans l'équation qui régit le mouvement vibratoire des plaques

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + m^2 \left(\frac{d^4 v}{dx^4} + 2\frac{d^4 v}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 v}{dy^4}\right) = 0.$$

En introduisant une quantité u', on peut remplacer l'équation proposée par les deux suivantes :

$$\alpha^2 u' = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad \alpha^2 u = \frac{d^2 u'}{dx^2} + \frac{d^2 u'}{dy^2}.$$

Posons

$$U = \frac{u + u'}{2}, \quad V = \frac{u - u'}{2},$$

et nous en conclurons

$$u = \mathrm{U} + \mathrm{V},$$

U et V étant donnés par les formules

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2} = -\alpha^2\mathrm{V}, \quad \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2} = \alpha^2\mathrm{U}.$$

L'expression la plus générale de V est, d'après le numéro précédent,

$$\mathrm{V} = \int\int_0^\pi \cos(\alpha r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega\,\rho\,ds;$$

celle de U sera

$$\mathrm{U} = \int\int_0^\pi \cos(\alpha\sqrt{-1}\,r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega\,\rho_1\,ds,$$

que l'on déduit de V en remplaçant α par $\alpha\sqrt{-1}$ et la fonction ρ par une autre fonction ρ_1, et l'intégrale générale de l'équation (7) est la somme de ces deux expressions. Mais, pour le problème des plaques vibrantes, ρ et ρ_1, qui se trouvent dans l'expression de u, ne sont pas des fonctions arbitraires de a, b, coordonnées de ds.

6. Examinons l'équation

$$(8) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\Delta u,$$

que l'on rencontre dans les mouvements très-petits d'un gaz ou dans le mouvement vibratoire d'un corps solide.

Si u ne dépend que de r, on aura

$$\frac{d^2(ru)}{dt^2} = \alpha^2\frac{d^2(ru)}{dr^2}.$$

L'intégrale de cette équation est bien connue, et l'on a

$$u = \frac{\varphi(r+\alpha t) + \psi(r-\alpha t)}{r},$$

en désignant par φ et ψ deux fonctions arbitraires.

On peut déduire de là que, dans l'intérieur d'une surface σ, l'expression

$$\int \frac{\varphi(r+\alpha t)}{r}\rho\, d\sigma + \int \frac{\psi(r-\alpha t)}{r}\rho_1\, d\sigma,$$

dans laquelle ρ et ρ_1 sont des fonctions des coordonnées a, b, c de l'élément $d\sigma$ et r la distance de $d\sigma$ au point (x, y, z), est une intégrale de l'équation (8). Toutefois nous verrons que cette expression n'a pas la généralité suffisante pour être l'intégrale générale de l'équation (8), et que cette intégrale est

$$u = \int \frac{f(r+\alpha t, \theta, \psi) + F(r-\alpha t, \theta, \psi)}{r}\, d\sigma,$$

f et F étant des fonctions arbitraires de trois variables, et θ, ψ étant deux coordonnées particulières qui servent à déterminer un point de la surface σ.

Si l'équation (8) ne se rapporte qu'à deux dimensions, elle se réduit à

$$(9) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

qui donne le mouvement vibratoire d'une membrane.

Si u ne dépend que de r, on a

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right),$$

qui a pour intégrale

$$u = \int_0^\pi f(r\cos\omega + \alpha t)\, d\omega + \int_0^\pi F(r\cos\omega + \alpha t)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega.$$

(*Voir* un Mémoire de Poisson, 19e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 227). Nous verrons que l'intégrale générale de l'équation (9) dans l'intérieur d'une courbe s peut se mettre sous la forme

$$u = \int\int_c^\pi F(r\cos\omega + \alpha t, v)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, ds,$$

F étant une fonction arbitraire de deux variables et v une coordonnée qui sert à déterminer un point de la courbe s.

7. Passons à l'équation

$$\frac{du}{dt} = a^2 \Delta u. \tag{1}$$

Supposons d'abord qu'elle se rapporte à trois dimensions. Si u ne dépendait que de r, cette équation se réduirait à

$$a^2 \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} \right) = \frac{du}{dt},$$

qui peut s'écrire

$$a^2 \frac{d^2(ru)}{dr^2} = \frac{d(ru)}{dt}.$$

On connaît l'intégrale générale de cette équation, qui a été donnée par Laplace et Fourier, et l'on en conclut

$$ru = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(r-\alpha)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{t}} f(\alpha) d\alpha,$$

ou

$$ru = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(r + 2as\sqrt{t}) ds,$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire.

Posons

$$\varphi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(r + 2as\sqrt{t}, \theta, \psi) ds,$$

en désignant par θ, ψ deux coordonnées propres à déterminer un point de la surface σ, et nous aurons une intégrale de l'équation (1) en posant

$$u = \int \varphi(r, t, \theta, \psi) d\sigma. \tag{2}$$

Nous verrons plus loin que cette intégrale a toute la généralité voulue.

Considérons ensuite le cas où l'équation (1) ne se rapporte qu'à deux dimensions et se réduit à

$$\frac{du}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right). \tag{3}$$

Si u ne dépend que de r, on a

$$a^2 \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) = \frac{du}{dt}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} f(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t})\,d\omega\, e^{-\alpha^2}d\alpha$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t})\log(r\sin^2\omega)\,d\omega\, e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

(*Voir* Poisson, 19e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 245).

Posons

$$\psi(r, t, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t}, v)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega\, e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

$\mathrm{F}(r, v)$ étant une fonction arbitraire de deux variables et v une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s qui limite l'espace dans lequel a lieu l'équation (3). Nous satisferons à cette équation en faisant

$$u = \int \psi(r, t, v)\,ds,$$

et nous verrons que cette expression représente la solution générale.

8. Posons, en général,

$$\Delta\Delta u = \Delta^2 u, \quad \Delta\Delta^2 u = \Delta^3 u, \ldots;$$

nous aurions pu, dans ce Mémoire, nous occuper plus généralement d'équations de la forme

$$\mathrm{A}\,\Delta^p u + \mathrm{B}\Delta^q u + \ldots = au^r + bu^s + \ldots,$$

ou de celle-ci :

$$A\Delta^p u + B\Delta^q u + \ldots = a\frac{d^r u}{dt^r} + b\frac{d^s u}{dt^s} + \ldots,$$

en désignant par A, B,..., a, b,... des constantes. Mais, afin d'éviter des complications qui n'auraient pas d'utilité, nous préférons nous borner aux équations que l'on rencontre en Physique mathématique.

Sur l'équation $\Delta v = -\alpha^2 v$.

9. Imaginons un volume ϖ dont l'élément est $d\varpi$, terminé par une surface σ dont on désigne l'élément par $d\sigma$; si v et w, ainsi que leurs dérivées, sont des fonctions continues des coordonnées rectangulaires x, y, z dans l'intérieur du volume ϖ, on a cette équation, que l'on attribue à Green, quoiqu'elle ait été employée auparavant par Poisson,

$$\int v\Delta w\,d\varpi - \int w\Delta v\,d\varpi = \int v\frac{dw}{dn}d\sigma - \int w\frac{dv}{dn}d\sigma,$$

dn étant l'élément de normale à la surface menée vers l'extérieur du corps, et les intégrales se rapportant au volume entier ou à toute la surface.

Prenons pour w la fonction $\frac{\cos\alpha r}{r}$, r étant la distance du point (x, y, z) au point (a, b, c) situé dans l'élément $d\varpi$; on aura (n° 4)

$$\Delta w = -\alpha^2 w.$$

Si le point (x, y, z) est situé en dehors du volume ϖ, la fonction w satisfait à la condition de continuité indiquée, et l'on a, d'après la formule ci-dessus, en mettant a, b, c au lieu de x, y, z dans v,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &-\alpha^2\int v\frac{\cos\alpha r}{r}d\varpi - \int\frac{\cos\alpha r}{r}\Delta v\,d\varpi \\ &= -\int v\frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn'}d\sigma + \int\frac{\cos\alpha r}{r}\frac{dv}{dn'}d\sigma; \end{aligned}\right.$$

dn' est l'élément de normale comptée vers l'intérieur du corps, et dans le second membre r représente la distance du point (x, y, z) à l'élément $d\sigma$.

Si le point (x, y, z) est à l'extérieur de σ, l'équation précédente est applicable au volume renfermé entre σ et une sphère σ' infiniment petite, dont le point (x, y, z) est le centre. On aura donc

$$-\alpha^2 \int v \frac{\cos \alpha r}{r} d\varpi - \int \frac{\cos \alpha r}{r} \Delta v \, d\varpi = -\int v \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma$$
$$-\int v \frac{d \frac{\cos \alpha R}{R}}{dR} d\sigma' + \int \frac{\cos \alpha R}{R} \frac{dv}{dR} d\sigma',$$

R étant le rayon de la sphère; car les intégrales du premier membre rapportées au volume infiniment petit de la sphère sont négligeables; la quatrième intégrale du second membre est négligeable aussi, et la troisième est égale à

$$v \int (\alpha R \sin \alpha R + \cos \alpha R) \frac{d\sigma'}{R^2},$$

ou, en faisant tendre R vers zéro, à $4\pi v$, dans lequel on remet dans v x, y, z au lieu de a, b, c.

Donc on a, si le point (x, y, z) est intérieur au volume ϖ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\alpha^2 \int v \frac{\cos \alpha r}{r} d\varpi - \int \frac{\cos \alpha r}{r} \Delta v \, d\varpi \\ & = -\int v \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma + 4\pi v. \end{aligned} \right.$$

10. Posons

$$(3) \qquad V = \int \frac{\cos \alpha r}{r} D \, d\Pi,$$

$d\Pi$ étant l'élément d'un volume Π, dont la masse est $D\,d\Pi$; D est par conséquent une fonction des coordonnées a, b, c de l'élément $d\Pi$. On a

$$(4) \qquad \Delta V = -\alpha^2 V$$

pour tout point situé en dehors du volume auquel se rapporte l'intégrale; cherchons quelle est la valeur de ΔV pour un point de ce volume.

Décrivons une très-petite sphère qui renferme dans son intérieur le point (x, y, z), et posons

$$V = v + v',$$

v' étant la partie de V qui correspond au volume de la petite sphère et v étant la partie restante.

On a d'abord

$$(a) \qquad \Delta v = -\alpha^2 v;$$

si l'on désigne par $d\tau$ l'élément de volume de la sphère, on aura

$$v' = \int \frac{\cos \alpha r}{r} D d\tau,$$

ou, en développant $\cos \alpha r$ par rapport aux puissances de r, qui est très-petit,

$$v' = \int \frac{1}{r} D d\tau - \frac{\alpha^2}{2} \int r D d\tau + \ldots.$$

Le Δ du deuxième terme et des suivants est négligeable, et l'on sait que le Δ du premier terme est égal à $-4\pi D$. On a donc

$$(b) \qquad \Delta v' = -4\pi D,$$

en remplaçant dans D les quantités a, b, c par x, y, z. Il en résulte, en ajoutant (a) et (b) et remarquant que v' est infiniment petit,

$$(c) \qquad \Delta V + \alpha^2 V = -4\pi D.$$

Dans l'expression

$$\int \frac{\sin \alpha r}{r} D d\Pi,$$

la quantité qui se trouve sous le signe d'intégration ne devient pas

infinie pour $r = 0$, et cette expression satisfait, en dedans comme en dehors du volume Π, à l'équation (4).

11. Voyons ce que deviennent les équations (1) et (2) appliquées à l'expression (3). D'après l'équation (c), on a

$$\int \Delta V \frac{\cos \alpha r}{r} d\Pi = -\int \frac{\alpha^2 V + 4\pi D}{r} \cos \alpha r \, d\Pi = -\alpha^2 \int V \frac{\cos \alpha r}{r} d\Pi - 4\pi V.$$

Donc, si le volume ϖ renferme le volume Π et si le point (x, y, z) est situé en dehors du premier volume, on a, d'après la formule (1),

$$(5) \qquad 4\pi \int \frac{\cos \alpha r}{r} D \, d\Pi = -\int V \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{dV}{dn'} d\sigma.$$

Si le volume ϖ renferme encore le volume Π, mais que le point (x, y, z) soit situé à l'intérieur du premier volume, on a, d'après la formule (2),

$$(6) \quad 4\pi \int \frac{\cos \alpha r}{r} D \, d\Pi = -\int V \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{dV}{dn'} d\sigma + 4\pi V.$$

12. Énonçons maintenant ce théorème important :

Imaginons un volume limité par une surface σ. On peut toujours distribuer sur cette surface une couche de matière dont la densité ρ soit telle que l'expression

$$\int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma,$$

où r représente la distance du point (x, y, z) à l'élément $d\sigma$, ait une valeur donnée sur la surface.

Quand on suppose $\alpha = 0$, on a un théorème bien connu de Gauss, et quand α est différent de zéro, le théorème peut se démontrer de la même manière. (*Voir* le cinquième volume des *OEuvres de Gauss*, p. 232-237.)

La démonstration se décompose en les parties suivantes :

1° Si une couche de matière a une masse donnée et que la densité ρ

ait partout le même signe; si, de plus, on pose

$$v = \int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma, \quad \Omega = \int (v - 2U) \rho \, d\sigma,$$

U étant une fonction de x, y, z, dont les valeurs sont données sur σ, Ω est susceptible d'un minimum pour lequel $v - U$ a une valeur constante.

2° Si la densité peut changer de signe, on montre ensuite que $v - U$ peut également avoir une valeur constante, la masse de la couche étant donnée.

3° On peut, quand la masse est arbitraire, s'arranger pour que $v - U$ ait une valeur constante donnée sur la surface, et, par suite, il est clair enfin que v peut avoir sur la surface une valeur donnée et variable d'un point à l'autre.

13. Supposons une fonction v qui satisfait à l'équation

$$\Delta v = - \alpha^2 v$$

dans l'intérieur d'une surface et qui varie d'une manière continue dans cet espace, ainsi que ses dérivées du premier ordre.

On a, d'après la formule (2),

$$(7) \qquad 0 = - \int v \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma + 4\pi v.$$

Considérons l'expression qui se rapporte à une masse distribuée sur la surface σ

$$V = \int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma;$$

en supposant d'abord que la masse soit à l'intérieur de σ et occupe le volume Π, on aura, d'après (6), en remplaçant $\frac{d}{dn'}$ par $-\frac{d}{dn}$,

$$4\pi \int \frac{\cos \alpha r}{r} D \, d\Pi = \int V \frac{d \frac{\cos \alpha r}{r}}{dn} d\sigma - \int \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{dV}{dn} d\sigma + 4\pi V.$$

Faisons approcher les masses de la surface σ jusqu'à ce qu'elles viennent s'appliquer sur cette surface et y former une couche de densité ρ; $\frac{dV}{dn}$ ne cessera pas de varier d'une manière continue, le premier membre de l'équation précédente se réduira à $4\pi V$ et l'on aura

$$(8) \qquad 0 = \int V \frac{d\frac{\cos\alpha r}{r}}{dn} d\sigma - \int \frac{\cos\alpha r}{r} \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Or, d'après le théorème du numéro précédent, on peut disposer de ρ de manière que V ait une valeur donnée sur la surface. Supposons donc que V ait sur σ la même valeur que v, et, en retranchant (8) de (7), nous aurons

$$v = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\cos\alpha r}{r} \left(\frac{dv}{dn'} + \frac{dV}{dn}\right) d\sigma.$$

Donc nous avons le théorème suivant :

Toute fonction qui satisfait à l'intérieur d'une surface σ à l'équation

$$\Delta u = -\alpha^2 u,$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, a pour expression

$$(d) \qquad \int \frac{\cos\alpha r}{r} \rho\, d\sigma,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément $d\sigma$.

Dans ce théorème, la surface σ, qui limite l'espace continu considéré, n'est pas astreinte à former une surface continue; elle peut, au contraire, être composée de plusieurs surfaces fermées. Si la surface σ se réduit à une seule surface fermée, nous aurons occasion de reconnaître qu'à l'expression (d) on peut substituer l'expression

$$(e) \qquad \int \frac{\sin\alpha r}{r} \rho_1 d\sigma.$$

Il est aisé de reconnaître que la dérivée, par rapport à la normale à la surface, de l'expression (d) varie d'une manière discontinue quand

on traverse la surface σ, tandis que la même dérivée de l'expression (e) est continue dans ce passage. Donc, si les deux expressions (d) et (e) se confondent à l'intérieur de la surface σ, elles se séparent au dehors.

14. Les raisonnements qui précèdent peuvent être facilement étendus à la théorie de l'équation

$$\Delta v = -\alpha^2 v,$$

réduite à deux coordonnées.

Nous avons vu (n° 4) que les expressions

$$M = \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega, \quad N = \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega)\, d\omega$$

satisfont à cette équation, et par une démonstration semblable à celle du numéro précédent, on obtiendra le théorème suivant :

Si une fonction satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = -\alpha^2 v$$

dans l'intérieur d'une surface plane limitée par une courbe s, et qu'elle y soit continue ainsi que ses dérivées du premier ordre, cette fonction peut être mise sous la forme

$$(f) \qquad \int N \rho\, ds,$$

en désignant par ρ une fonction des coordonnées de l'élément ds.

Si la ligne s se réduit à une seule ligne fermée, nous donnerons des exemples où l'on peut remplacer dans le théorème précédent l'expression (f) par l'expression plus simple

$$(g) \qquad \int M \rho\, ds.$$

Il est aisé de démontrer que les dérivées de l'expression (f) varient d'une manière discontinue quand le point (x, y, z) traverse la courbe s, tandis que celles de (g) restent contenues dans ce passage.

Développements en séries des quantités M *et* N.

15. Les quantités

$$M = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)d\omega, \quad N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega$$

satisfont à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2u,$$

et nous allons donner des développements en séries de M et N.

Prenons des coordonnées polaires, en posant

$$x = R\cos\alpha, \quad y = R\sin\alpha,$$

et soient a, R les coordonnées polaires d'une extrémité de la distance r et α_1, A les coordonnées polaires de l'autre extrémité. Nous avons

$$r^2 = A^2 - 2AR\cos(\alpha - \alpha_1) + R^2$$

et

$$\frac{1}{\pi}M = 1 - \frac{a^2r^2}{2^2} + \frac{a^4r^4}{(2.4)^2} - \ldots \pm \frac{a^{2p}r^{2p}}{(2.4.6\ldots 2p)^2} + \ldots.$$

Posons $\alpha - \alpha_1 = \theta$, et nous aurons, en faisant $\sqrt{-1} = i$,

$$r^2 = (A - Re^{\theta i})(A - Re^{-\theta i}).$$

Élevons à la puissance n, et nous aurons

$$(A - Re^{\theta i})^n = A^n - nA^{n-1}Re^{\theta i} + \frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}R^2e^{2\theta i} - \ldots,$$

$$(A - Re^{-\theta i})^n = A^n - nA^{n-1}Re^{-\theta i} + \frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}R^2e^{-2\theta i} - \ldots;$$

puis en multipliant, nous obtenons

$$r^{2n} = P_{0,n} + 2P_{1,n}\cos\theta + 2P_{2,n}\cos 2\theta + \ldots,$$

si nous posons

$$P_{0,n} = A^{2n} + n^2 A^{2n-2} R^2 + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 A^{2n-4} R^4 + \ldots,$$

$$P_{1,n} = -nA^{2n-1}R - \frac{n(n-1)}{1.2} A^{2n-3} R^3 - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{R^4}{a^5} - \ldots,$$

$$P_{2,n} = \frac{n(n-1)}{1.2} A^{2n-2} R^2 + n\,\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} A^{2n-4} R^4$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} A^{2n-6} R^6 + \ldots,$$

$$P_{3,n} = -\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} A^{2n-3} R^3 - n\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} A^{2n-5} R^5$$
$$- \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{2.3.4.5} A^{2n-7} R^7 + \ldots,$$

. . . . . .

Nous aurons donc

$$\frac{1}{\pi} M = 1 - \frac{a^2}{2^2}(A^2 + R^2 - 2AR\cos\theta)$$
$$+ \frac{a^4}{(2.4)^2}[A^4 + 4A^2R^2 + R^4 - 4(A^3R + AR^3)\cos\theta + 2A^2R^2\cos 2\theta]$$
$$- \frac{a^6}{(2.4.6)^2}[A^6 + 9A^4R^2 + 9A^2R^4 + R^6$$
$$- 6(A^5R + 3A^3R^3 + AR^5)\cos\theta$$
$$+ 6(A^4R^2 + A^2R^4)\cos 2\theta - 2A^3R^3\cos 3\theta]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Désignons par $Q_n(R)$ la fonction suivante :

$$Q_n(R) = R^n\left[1 - \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right],$$

qui est une solution de l'équation différentielle

$$R^2 \frac{d^2Q}{dR^2} + R\frac{dQ}{dR} - (n^2 - a^2R^2)Q = 0;$$

on reconnaît sans difficulté que la quantité $\frac{1}{\pi}M$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}M = {} & Q_0(A)Q_0(R) + 2\frac{a^2}{2^2}Q_1(A)Q_1(R)\cos\theta \\ & + 2\frac{a^4}{(2.4)^2}Q_2(A)Q_2(R)\cos 2\theta + \ldots \\ & + 2\frac{a^{2n}}{(2.4.6\ldots 2n)^2}Q_n(A)Q_n(R)\cos n\theta + \ldots,\end{aligned}$$

formule remarquable et dont nous aurons occasion de faire des applications.

Multiplions les deux membres par $\cos n\alpha_1\, d\alpha_1$ et intégrons de o à 2π; nous aurons

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(ar\cos\omega)\,d\omega\cos n\alpha_1\,d\alpha_1 = \frac{2\pi a^{2n}}{(2.4.6\ldots 2n)^2}Q_n(A)Q_n(R)\cos n\alpha.$$

Or $Q_n(R)$, au lieu d'être exprimé par une série, peut l'être par la formule

$$Q_n(R) = \frac{2.4.6\ldots(2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}R^n\int_0^{\pi}\sin^{2n}\omega\cos(aR\cos\omega)\,d\omega;$$

on a donc une intégrale double exprimée par le produit de deux intégrales simples.

16. Le développement analogue de N en série est plus difficile à obtenir. Nous avons

$$N = \log r\int_0^{\pi}\cos(ar\cos\omega)\,d\omega + 2\int_0^{\pi}\cos(ar\cos\omega)\log\sin\omega\,d\omega.$$

Considérons d'abord le cas où a est nul; N se réduit à

$$N_0 = \pi \log r + 2\int_0^\pi \log \sin\omega\, d\omega$$
$$= \pi \log r - 2\pi \log 2 \text{ (\textit{Calcul intégral} de M. Bertrand, p. 147).}$$

On a d'ailleurs

$$r^2 = A^2\left(1 - \frac{R}{A}e^{\theta i}\right)\left(1 - \frac{R}{A}e^{-\theta i}\right),$$

et en prenant les logarithmes

$$\log r = \log A - \frac{R}{A}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{R^2}{A^2}\cos 2\theta - \ldots - \frac{1}{n}\frac{R^n}{A^n}\cos n\theta - \ldots;$$

donc on a

$$\frac{1}{\pi}N_0 = \log A - 2\log 2 - \frac{R}{A}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{R^2}{A^2}\cos 2\theta - \ldots - \frac{1}{n}\frac{R^n}{A^n}\cos n\theta - \ldots.$$

Cherchons maintenant à passer au cas où a n'est pas nul. N satisfait à l'équation (1), et si nous adoptons des coordonnées polaires, cette équation se change en la suivante :

$$(2)\qquad \frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -a^2u.$$

Commençons par déterminer une solution de cette équation qui soit le produit d'une fonction de R par une fonction de α, et posons

$$(3)\qquad u = Q(R)T(\alpha),$$

nous trouverons que l'on a

$$T(\alpha) = A\cos n\alpha + B\sin n\alpha,$$

n étant entier afin que $T(\alpha)$ ait pour période 2π, et Q satisfaisant à l'équation

$$(4)\qquad R^2\frac{d^2Q}{dR^2} + R\frac{dQ}{dR} + (a^2R^2 - n^2)Q = 0,$$

et la solution de cette équation différentielle est

$$CQ_n(R) + C'Q'_n(R),$$

en posant

$$Q'_n(R) = R^{-n}\left[1 + \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^2}{1(n-1)} + \frac{\left(\frac{a}{2}R\right)^4}{1\ 2(n-1)(n-2)} - \ldots\right].$$

(Voir *Mémoire sur la membrane elliptique*, t. XIII, p. 141.)

$Q_n(R)$ renferme le facteur R^n et $Q'_n(R)$ le facteur R^{-n}. A la vérité, lorsque n est entier, la forme de la seconde expression n'est plus admissible; mais, comme elle l'est pour toute autre valeur de n, il résulte de la continuité qu'il existe une solution qui renferme R^{-n} en facteur et que nous désignerons par $Q'_n(R)$. Dans le cas de $n = 0$, nous poserons

$$Q'_0(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(aR\cos\omega)\log(R\sin^2\omega)\,d\omega,$$

qui est une solution de l'équation (4) pour $n = 0$.

L'expression de N qui satisfait à l'équation (2) doit être la somme d'une infinité de quantités telles que (3). Supposons $R < A$; pour $a = 0$, N doit se réduire à l'expression que nous avons trouvée pour N_0; or, pour $a = 0$, $Q_n(R)$ et $Q'_n(R)$ se réduisent à R^n et R^{-n}; donc les fonctions $Q_n(R)$ entrent seules dans le développement de N, et l'on peut poser

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}N = {} & EQ_0(R) + E_1Q_1(R)(D_1\cos\alpha + F_1\sin\alpha) + \ldots \\ & + E_nQ_n(R)(D_n\cos n\alpha + F_n\sin n\alpha) + \ldots,\end{aligned}$$

les quantités E, D, F étant des constantes.

N est fonction de $\alpha - \alpha_1 = \theta$, et l'on en peut facilement conclure que le développement précédent peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi}N = EQ_0(R) + E_1Q_1(R)\cos\theta + \ldots + E_nQ_n(R)\cos n\theta + \ldots.$$

Si l'on regarde R comme constant, chaque terme de N doit pouvoir

être considéré comme le produit d'une fonction de A par une fonction de θ, et l'on doit avoir

$$E_n = CQ_n(A) + C'Q'_n(A),$$

C et C' étant deux constantes; mais E_n doit se réduire à $-\frac{1}{n}\frac{1}{A^n}$ pour $a = 0$; donc on a simplement

$$E_n = -\frac{1}{n}Q'_n(A),$$

et l'on a enfin cette formule remarquable

$$\frac{1}{\pi}N = Q'_0(A)Q_0(R) - Q'_1(A)Q_1(R)\cos\theta - \ldots - \frac{1}{n}Q'_n(A)Q_n(R)\cos n\theta - \ldots.$$

Remarquons que, R étant supposé plus petit que A, les quantités A et R entrent de la même manière dans le développement de M, et entrent, au contraire, d'une manière différente dans le développement de N.

17. Les développements de M et N, que nous venons d'obtenir, naissent de la considération des coordonnées polaires. Si x et y sont des coordonnées rectilignes rectangulaires et que nous posions

$$x = c\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \quad y = c\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha,$$

pour prendre α et β comme nouvelles coordonnées, l'équation $\beta =$ const. ou l'équation

$$\frac{x^2}{(e^\beta + e^{-\beta})^2} + \frac{y^2}{(e^\beta - e^{-\beta})^2} = \frac{c^2}{4},$$

dans laquelle on suppose β un paramètre variable, représentera des ellipses homofocales, et l'équation $\alpha =$ const. ou cette autre

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = c^2,$$

dans laquelle α est un paramètre variable, représentera une série d'hyperboles homofocales entre elles et avec les ellipses.

Nous allons maintenant nous occuper des développements de M et N

suivant des séries qui proviennent de la considération des coordonnées α et β.

Si aux coordonnées x et y on substitue les coordonnées α, β, l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2u$$

se change en la suivante

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -a^2c^2\left[\left(\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha\right]u$$

(voir *Membrane elliptique*, t. XIII de ce *Journal*, p. 146), et, si l'on suppose que u soit le produit d'une fonction de α par une fonction de β, et qu'on pose en conséquence

$$u = P(\alpha)Q(\beta),$$

P et Q seront donnés par les deux équations différentielles du second ordre

$$(a) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0,$$

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta})]Q = 0,$$

h étant égal à $\frac{ac}{2}$ et R étant une constante.

R est une constante qui doit être telle, que P ait 2π pour période. (Nous avons appris à déterminer cette quantité dans le Mémoire cité.) Pour $h = 0$, P se réduit à

$$C\cos\sqrt{R}\alpha + C'\sin\sqrt{R}\alpha,$$

C et C′ étant des constantes, et R se réduit au carré d'un nombre entier; mais, quand h n'est pas nul, la solution générale de l'équation (a) n'est pas périodique, et l'on a deux sortes de solutions de cette équation : les unes que nous avons désignées par $P_2(\alpha)$, et qui se réduisent à $\cos g\alpha$ pour $h = 0$; les autres, désignées par $P_1(\alpha)$, qui se réduisent à $\sin g\alpha$ pour $h = 0$; et, quoique R se réduise à g^2 dans ces

deux solutions pour $h = 0$, il n'y a pas cependant la même valeur, de sorte que $P_2(\alpha)$ et $P_1(\alpha)$ sont les solutions de deux équations différentielles distinctes. Nous représenterons par

$$P_2(\alpha, g), \quad P_1(\alpha, g)$$

les deux fonctions P, qui se réduisent à $\cos g\alpha$ et $\sin g\alpha$ pour $h = 0$.

r étant la distance de deux points dont les coordonnées dans le système elliptique sont α, β et α_1, b, nous aurons

$$\begin{aligned} r^2 = {} & \frac{c^2}{4}\left[(e^\beta + e^{-\beta})\cos\alpha - (e^b + e^{-b})\cos\alpha_1\right]^2 \\ & + \frac{c^2}{4}\left[(e^\beta - e^{-\beta})\sin\alpha - (e^b - e^{-b})\sin\alpha_1\right]^2. \end{aligned}$$

Après avoir rappelé ces principes, nous allons donner les développements des quantités

$$M = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\,d\omega, \quad N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

sans nous étendre sur les considérations qui nous y ont conduit.

On a

$$\begin{aligned} M = {} & P_2(\alpha, 0)P_2(\alpha_1, 0)Q_2(\beta, 0)Q_2(b, 0) \\ & + 8\frac{h^2}{2^2}\left[P_2(\alpha, 1)P_2(\alpha_1, 1)Q_2(\beta, 1)Q_2(b, 1)\right. \\ & \qquad \left. + P_1(\alpha, 1)P_1(\alpha_1, 1)Q_1(\beta, 1)Q_1(b, 1)\right] \\ & + 8\frac{h^4}{(2.4)^2}\left[P_2(\alpha, 2)P_2(\alpha_1, 2)Q_2(\beta, 2)Q_2(b, 2)\right. \\ & \qquad \left. + P_1(\alpha, 2)P_1(\alpha_1, 2)Q_1(\beta, 2)Q_1(b, 2)\right] \\ & + 8\frac{h^6}{(2.4.6)^2}\left[P_2(\alpha, 3)P_2(\alpha_1, 3)Q_2(\beta, 3)Q_2(b, 3)\right. \\ & \qquad \left. + P_1(\alpha, 3)P_1(\alpha_1, 3)Q_1(\beta, 3)Q_1(b, 3)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il y a une remarque à faire sur les valeurs des expressions de P et Q.

Dans notre Mémoire sur la membrane elliptique, les fonctions P et Q ne sont pas complétement définies; elles le sont seulement à un facteur

constant près, qui se réduit à l'unité pour $h = 0$. Ainsi, par exemple, d'après la formule donnée dans ce Mémoire, en ne prenant que les termes en h^0 et h^2, on réduit $P_2(\alpha, 1)$ et $P_1(\alpha, 1)$ à

$$P_2(\alpha, 1) = \cos\alpha - \frac{h^2}{8}\cos 3\alpha, \quad P_1(\alpha, 1) = \sin\alpha - \frac{h^2}{8}\sin 3\alpha,$$

et dans l'expression de M il faut faire

$$P_2(\alpha, 1) = \cos\alpha - \frac{h^2}{8}(\cos 3\alpha + \cos\alpha),$$

$$P_1(\alpha, 1) = \sin\alpha - \frac{h^2}{8}(\sin 3\alpha - \sin\alpha);$$

ce sont les premières expressions multipliées respectivement par

$$1 - \frac{h^2}{8}, \quad 1 + \frac{h^2}{8}.$$

D'après la manière dont Q_2 et Q_1 se déduisent de P_2 et P_1, on a

$$Q_2(\beta, 1) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} - \frac{h^2}{8}\left(\frac{e^{3\beta} + e^{-3\beta}}{2} + \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\right),$$

$$Q_1(\beta, 1) = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} - \frac{h^2}{8}\left(\frac{e^{3\beta} - e^{-3\beta}}{2} - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\right).$$

L'indétermination que nous laissons subsister dans l'expression de M sera cependant sans inconvénient dans les applications que nous aurons à en faire.

Pour déduire de la formule que nous venons de donner pour M celle qui est relative aux coordonnées polaires et que nous avons obtenue précédemment, il suffit de faire $c = 0$, en se rappelant que l'on a $h = \frac{ac}{2}$, puisque l'on a pour $c = 0$

$$Q_2(\beta, g) = Q_1(\beta, g),$$

et que, lorsque c tend vers zéro, les quantités

$$\frac{c^g}{2^{g-1}} Q_2(\beta, g), \quad \frac{c^g}{2^{g-1}} Q_1(\beta, g)$$

tendent vers l'expression que nous avons représentée par $Q_g(R)$ dans le n° **15**.

18. Donnons ensuite le développement de N. Dans le cas où a est nul, N se réduit à

$$N_0 = \pi(\log r - 2\log 2).$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} r^2 = {} & \frac{c^2}{4}\left[(e^\beta + e^{-\beta})\cos\alpha - (e^b + e^{-b})\cos\alpha_1\right]^2 \\ & + \frac{c^2}{4}\left[(e^\beta - e^{-\beta})\sin\alpha - (e^b - e^{-b})\sin\alpha_1\right]^2, \end{aligned}$$

et cette expression peut se décomposer en facteurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{4}\Big[& \left(1 - e^\beta e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right)\left(1 - e^{-\beta} e^{-(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right) \\ & \left(1 - e^\beta e^{(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right)\left(1 - e^{-\beta} e^{(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Supposons $b > \beta$ et prenons les logarithmes des deux membres en appliquant la formule

$$\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \ldots,$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} \log r = \log\frac{ce^b}{2} & - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^b}\cos\alpha\cos\alpha_1 - \ldots - \frac{1}{g}\,\frac{e^{g\beta} + e^{-g\beta}}{e^{gb}}\cos g\alpha\cos g\alpha_1 - \ldots \\ & - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^b}\sin\alpha\sin\alpha_1 - \ldots - \frac{1}{g}\,\frac{e^{g\beta} - e^{-g\beta}}{e^{gb}}\sin g\alpha\sin g\alpha_1 - \ldots. \end{aligned}$$

Ainsi l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}N_0 = \log\frac{ce^b}{8} & - 2\,\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\,e^{-b}\cos\alpha\cos\alpha_1 - \ldots \\ & - \frac{2}{g}\,\frac{e^{g\beta} + e^{-g\beta}}{2}\,e^{-gb}\cos g\alpha\cos g\alpha_1 - \ldots \\ & - 2\,\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\,e^{-b}\sin\alpha\sin\alpha_1 - \ldots \\ & - \frac{2}{g}\,\frac{e^{g\beta} - e^{-g\beta}}{2}\,e^{-gb}\sin g\alpha\sin g\alpha_1 - \ldots. \end{aligned}$$

Examinons ce que deviennent les fonctions P_1, P_2, Q_1, Q_2 pour $a = 0$. Alors

$$P_2(\alpha, g) \text{ se réduit à } \cos g\alpha, \qquad Q_2(\beta, g) \text{ à } \frac{e^{g\beta} + e^{-g\beta}}{2};$$

$$P_1(\alpha, g) \text{ se réduit à } \sin g\alpha, \qquad Q_1(\beta, g) \text{ à } \frac{e^{g\beta} - e^{-g\beta}}{2};$$

$P_2(\alpha, 0)$ et $Q_2(\beta, 0)$ se réduisent à l'unité; quant à la fonction $P_1(\alpha, 0)$, elle est nulle, quel que soit a.

L'équation qui donne Q est

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta})]Q = 0,$$

et pour $a = 0$, on a $h = 0$, $R = g^2$; donc la solution générale de cette équation se réduit à

$$Q = Ce^{g\beta} + C'e^{-g\beta};$$

on en déduit pour solutions particulières

$$Q_2 = \frac{e^{g\beta} + e^{-g\beta}}{2}, \quad Q_1 = \frac{e^{g\beta} - e^{-g\beta}}{2},$$

et, de plus,

$$Q' = e^{-g\beta},$$

que nous pourrons écrire

$$Q' = Q_2 - Q_1.$$

Quand h est quelconque, en posant

$$m = R - 2h^2,$$

nous aurons

$$Q_1 = \beta + m\frac{\beta^3}{2.3} + (m^2 - 24h^2)\frac{\beta^5}{2.3.4.5} + \ldots,$$

$$Q_2 = 1 + m\frac{\beta^2}{1.2} + (m^2 - 8h^2)\frac{\beta^4}{2.3.4} + \ldots.$$

$P_1(\alpha, g)$ et $P_2(\alpha, g)$ ont 2π pour période, et les fonctions $Q_2(\beta, g)$ et

$Q_1(\beta, g)$, qui se déduisent des deux précédentes par le changement de α en $\beta\sqrt{-1}$, ont $2\pi\sqrt{-1}$ pour période. Si la quantité R, qui entre dans la fonction Q_1 ou Q_2, ne la rend pas périodique, nous la représenterons par

$$Q_1[\beta, R] \quad \text{ou} \quad Q_2[\beta, R].$$

Le terme général de N_0 renferme en facteur e^{-gb}; donc le terme de N, qui correspond au terme

$$-\frac{2}{g}\,\frac{e^{gb}+e^{-gb}}{2}\,e^{-gb}\cos g\alpha\cos g\alpha_1,$$

qui appartient à N_0, doit renfermer en facteur une fonction, que nous désignerons par $Q'(b, R_g)$, de la forme

$$(c) \qquad AQ_2(b, g) - BQ_1[b, R_g],$$

R_g étant la quantité R qui se trouve dans $P_2(\alpha, g)$, et A, B étant des constantes qui se réduisent à l'unité pour $h = 0$. Et le terme de N, qui correspond au terme

$$-\frac{2}{g}\,\frac{e^{gb}-e^{-gb}}{2}\,e^{-gb}\sin g\alpha\sin g\alpha_1,$$

qui appartient à N_0, renferme en facteur une fonction, que nous désignerons par $Q'(b, R'_g)$, de la forme

$$(d) \qquad DQ_2[b, R'_g] - EQ_1(b, g),$$

R'_g étant la quantité R qui se trouve dans $P_1(\alpha, g)$, et D, E étant des constantes qui se réduisent à l'unité pour $h = 0$.

Pour $g = 0$, la fonction $Q'(b, R_g)$ n'est plus de la forme (c). Quand on y fait $h = 0$, cette fonction satisfait à l'équation

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad Q = C + C'\beta;$$

et pour $h = 0$, $Q'(\beta, R_0)$ se réduit à

$$\log\frac{c}{8} + \beta \quad \text{ou} \quad \log\frac{ce^{\beta}}{8},$$

qui est le premier terme de N_0. Donc, pour une valeur quelconque de h, on aura

$$(e) \qquad Q'(b, R_0) = A \log \frac{c}{g} Q_2(b, o) + BQ_1[b, R_0],$$

A et B étant des constantes qui se réduisent à l'unité pour $h = o$.

D'après cela, on a pour le développement de N, lorsque β est $< b$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} N = {} & Q_2(\beta, o) Q'(b, R_0) P_2(\alpha, o) P_2(\alpha_1, o) \\ & - 2Q_2(\beta, 1) Q'(b, R_1) P_2(\alpha, 1) P_2(\alpha_1, 1) \\ & - 2Q_1(\beta, 1) Q'\{b, R'_1\} P_1(\alpha, 1) P_1(\alpha_1, 1) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & - \frac{2}{g} Q_2(\beta, g) Q'(b, R_g) P_2(\alpha, g) P_2(\alpha_1, g) - \dots \\ & - \frac{2}{g} Q_1(\beta, g) Q'\{b, R'_g\} P_1(\alpha, g) P_1(\alpha_1, g) - \dots\end{aligned}$$

Il faut remarquer que dans cette formule les fonctions Q′ n'ont pas été complétement définies, parce que nous n'avons rien dit des constantes A, B, D, E qui entrent dans (c), (d), (e), si ce n'est qu'elles se réduisent à l'unité pour $h = o$.

Développements en séries des quantités $\frac{\sin ar}{r}$, $\frac{\cos ar}{r}$.

19. Les quantités

$$K = \frac{\sin ar}{ar}, \quad L = \frac{\cos ar}{r},$$

dans lesquelles r désigne la distance du point (x, y, z) à un point fixe (α, β, γ), satisfont, comme nous avons vu (n° 4), à l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = - a^2 u.$$

Prenant des coordonnées sphériques, nous poserons

$$x = R \cos\theta, \quad y = R \sin\theta \cos\psi, \quad z = R \sin\theta \sin\psi,$$

et si A, θ', ψ' sont les coordonnées sphériques de la seconde extrémité de r, nous aurons

$$\alpha = \mathrm{A}\cos\theta', \quad \beta = \mathrm{A}\sin\theta'\cos\psi', \quad \gamma = \mathrm{A}\sin\theta'\sin\psi'.$$

Nous aurons, par suite,

$$r^2 = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{AR}\cos\omega + \mathrm{R}^2$$

en posant

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi').$$

Calculons d'abord K; nous aurons

$$\mathrm{K} = 1 - \frac{a^2r^2}{2.3} + \frac{a^4r^4}{2.3.4.5} - \frac{a^6r^6}{2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

ou

$$\begin{aligned}\mathrm{K} = 1 &- a^2\frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{AR}\cos\omega}{1.2.3} \\ &+ \frac{a^4}{2.3.4.5}[(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)^2 - 4\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)\cos\omega + 4\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2\cos^2\omega] \\ &\quad \frac{a^6}{2.3\ldots7}[(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)^3 - 6\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)^2\cos\omega + 12\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2\cos^2\omega \\ &\qquad\qquad - 8\mathrm{A}^3\mathrm{R}^3\cos^3\omega] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ordonnant par rapport aux puissances de $\cos\omega$, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathrm{K} = 1 &- \frac{a^2(\mathrm{A}^2+\mathrm{R}^2)}{2.3} + \frac{a^4}{2.3.4.5}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)^2 - \frac{a^6}{2.3\ldots7}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)^3 + \ldots \\ &+ a^2\cos\omega\left[\frac{2\mathrm{AR}}{2.3} - \frac{a^2}{2.3.4.5}4\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{a^6}{2.3\ldots7}6\mathrm{AR}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2)^2 - \ldots\right] \\ &+ a^4\cos^2\omega\left[\frac{4\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2}{2.3.4.5} - \frac{a^2}{2.3\ldots7}12\mathrm{A}^2\mathrm{R}^2(\mathrm{A}^2 + \mathrm{R}^2) + \ldots\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les X_n de Legendre sont donnés par la formule

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}\left[\cos^n\omega - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\omega \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\omega - \ldots\right],$$

et en faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient

$$X_1 = \cos\omega, \quad \frac{1.2}{1.3}X_2 = \cos^2\omega - \frac{1}{3},$$
$$\frac{1.2.3}{1.3.5}X_3 = \cos^3\omega - \frac{3}{5}\cos\omega,$$
$$\frac{1.2.3.4}{1.3.5.7}X_4 = \cos^4\omega - \frac{4.3}{2.7}\cos^2\omega + \frac{4.3.2.1}{2.4.7.5}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De ces équations on peut déduire successivement $\cos\omega, \cos^2\omega, \cos^3\omega, \ldots$ en fonction de $X_1, X_2, \ldots$, et l'on obtient

$$\cos\omega = X_1, \quad \cos^2\omega = \frac{1.2}{2.3}X_2 + \frac{1}{3},$$
$$\cos^3\omega = \frac{1.2.3}{1.3.5}X_3 + \frac{3}{5}X_1,$$
$$\cos^4\omega = \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7}X_4 + \frac{6}{7}\frac{1.2}{1.3}X_2 + \frac{1}{5},$$
$$\cos^5\omega = \frac{1.2.3.4.5}{1.3.5.7.9}X_5 + \frac{10}{9}\frac{1.2.3}{1.3.5}X_3 + \frac{3}{7}X_1.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En substituant ces expressions dans la formule qui donne K et en posant, en général,

$$T_n(R) = R^n\left[1 - \frac{n^2}{2(2n+3)}R^2 + \frac{n^4}{2.4(2n+3)(2n+5)}R^4 \right.$$
$$\left. - \frac{n^6}{2.4.6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}R^6 + \ldots\right],$$

on trouvera facilement cette formule remarquable

$$\begin{aligned} K = {} & T_0(A)T_0(R) + \frac{a^2}{3}T_1(A)T_1(R)X_1 + \frac{a^4}{3^2.5}T_2(A)T_2(R)X_2 \\ & + \frac{a^6}{3^2.5^2.7}T_3(A)T_3(R)X_3 + \frac{a^8}{3^2.5^2.7^2.9}T_4(A)T_4(R)X_4 \\ & + \frac{a^{10}}{3^2.5^2 7^2.9^2.11}T_5(A)T_5(R)X_5 + \ldots. \end{aligned}$$

Remarque. — Multiplions les deux membres de cette formule par $X_n \sin\omega\, d\omega$; en intégrant de o à π et remarquant que l'on a

$$\int_0^\pi X_n X_p \sin\omega\, d\omega = 0,$$

si n et p sont deux nombres entiers différents, on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin ar}{r} X_n \sin\omega\, d\omega \\ & = \frac{a^{2n+1}}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)} T_n(A)T_n(R)\int_0^\pi X_n^2 \sin\omega\, d\omega. \end{aligned}$$

D'ailleurs on a

$$\int_0^\pi X_n^2 \sin\omega\, d\omega = \frac{2}{2n+1}.$$

(Voir *Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 548.) On a donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin ar}{r} X_n \sin\omega\, d\omega = \frac{2a^{2n+1}}{3^2.5^2\ldots(2n+1)^2} T_n(A)T_n(R).$$

$T_n(A)$ et $T_n(R)$ peuvent être regardés comme des intégrales définies; car on a

$$T_n(R) = \frac{1}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n} R^n \int_0^\pi \cos(Ra\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega\, d\omega \text{ [*]}.$$

20. Occupons-nous ensuite de la fonction

$$L = \frac{\cos ar}{r}.$$

---

[*] D'après une formule de Legendre, ces deux quantités peuvent aussi s'exprimer sous forme finie. (*Voir* notre *Cours de Physique mathématique*, n° 88.)

Dans le cas où a est nul, on a, en supposant $R < A$, le développement bien connu

$$(f) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{A} + \frac{R}{A^2} X_1 + \frac{R^2}{A^3} X_2 + \ldots + \frac{R^n}{A^{n+1}} X_n + \ldots.$$

Cherchons à passer au cas où a n'est pas nul. L satisfait à l'équation

$$\Delta u = -a^2 u.$$

Si nous adoptons des coordonnées sphériques, cette équation prend la forme suivante :

$$\frac{d\left(R^2 \frac{du}{dR}\right)}{dR} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2 u}{d\psi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d \frac{du}{d\theta} \sin\theta}{d\theta} = -a^2 R^2 u.$$

Cherchons une solution de cette équation qui ne dépende que de R et ω. Pour y arriver, prenons pour l'axe polaire des coordonnées sphériques un rayon qui passe par l'extrémité (α, β, γ) de r; alors ω sera égal à θ, et u, ne dépendant que de R et ω, sera donné par l'équation

$$\frac{d\left(R^2 \frac{du}{dR}\right)}{dR} + \frac{1}{\sin\omega} \frac{d\left(\sin\omega \frac{du}{d\omega}\right)}{d\omega} = -a^2 R^2 u.$$

Particularisons encore cette solution en supposant qu'elle soit le produit d'une fonction de R par une fonction X_n; posons

$$(g) \qquad u = F(R) X_n.$$

Comme X_n satisfait à l'équation

$$\frac{1}{\sin\omega} \frac{d\left(\sin\omega \frac{dX_n}{d\omega}\right)}{d\omega} + n(n+1) X_n = 0,$$

F(R) est donné par l'équation

$$\frac{d\left(R^2 \frac{dF}{dR}\right)}{dR} - [n(n+1) - a^2 R^2] F = 0.$$

Si ensuite on désigne par C et C′ deux constantes arbitraires, on a

$$F = CT_n(R) + C'S_n(R),$$

$T_n(R)$ étant la fonction ainsi désignée dans ce qui précède, et $S_n(R)$ ayant pour valeur

$$S_n(R) = R^{-n-1}\left[1 + \frac{a^2R^2}{2(2n-1)} + \frac{a^4R^4}{2.4(2n-1)(2n-3)} + \frac{a^6R^6}{2.4.6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots\right].$$

Les termes de la série qui compose L doivent être de la forme de l'expression (g), et, comme le terme général de L doit être composé en A et ω, comme il l'est en R et ω, si l'on désigne son rang par $n+1$, il sera de la forme

$$[BT_n(A) + B'S_n(A)][CT_n(R) + C'S_n(R)]X_n,$$

B et B′ étant deux constantes arbitraires. Pour $a = 0$, il devient

$$\left(BA^n + B'\frac{1}{A^{n+1}}\right)\left(CR^n + C'\frac{1}{R^{n+1}}\right)X_n;$$

mais pour $a = 0$, L se réduit à $\frac{1}{r}$, son développement à (f) et le terme en question à

$$\frac{1}{A^{n+1}}R^nX_n.$$

Ainsi l'on a

$$B = 0, \quad B' = 1, \quad C = 1, \quad C' = 0,$$

et le terme général de L est

$$S_n(A)T_n(R)X_n.$$

Donc enfin l'on a, si R est $<$ A, la formule suivante :

$$L = S_0(A)T_0(R) + S_1(A)T_1(R)X_1 + \ldots + S_n(A)T_n(R)X_n + \ldots.$$

Nous allons donner des applications des développements précédents.

Intégration de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2u$ *dans l'intérieur d'un cercle.*

21. Supposons qu'une fonction u satisfasse à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2u$$

dans l'intérieur d'un cercle de rayon H, et que sa valeur soit donnée sur le contour de ce cercle; nous allons montrer comment on pourra la déterminer.

D'après le théorème du n° **14**, la fonction u peut être mise sous la forme

$$(2) \quad u = \int N\rho\, ds, \quad \text{avec} \quad N = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

ds désignant l'élément de la circonférence du cercle et l'intégrale se rapportant à la circonférence entière; de plus, ρ désigne une fonction d'un point du contour.

Supposons que les deux axes rectangulaires passent par le centre du cercle, et prenons des coordonnées polaires en posant

$$x = R\cos\alpha, \quad y = R\sin\alpha;$$

les coordonnées d'un point quelconque du cercle seront H et α_1, que nous ferons varier de 0 à 2π. Alors on a

$$r^2 = H^2 - 2HR\cos(\alpha - \alpha_1) + R^2, \quad ds = H\,d\alpha_1,$$

et, ρ étant une fonction de α_1 qui n'est assujettie qu'à rester invariable quand on augmente α_1 de 2π, on pourra poser

$$\rho = A_0 + A_1\cos\alpha_1 + B_1\sin\alpha_1 + A_2\cos 2\alpha_1 + B_2\sin 2\alpha_1 + \ldots.$$

D'ailleurs, R étant $<$ H, on a (n° **16**)

$$\frac{1}{\pi}N = Q_0(R)Q_0'(H) - Q_1(R)Q_1'(H)(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1) - \ldots$$
$$-\frac{1}{n}Q_n(R)Q_n'(H)(\cos n\alpha\cos n\alpha_1 + \sin n\alpha\sin n\alpha_1) - \ldots,$$

et, comme on a

$$\int_0^{2\pi}\cos n\alpha_1\cos p\alpha_1\,d\alpha_1 = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin n\alpha_1\sin p\alpha_1\,d\alpha_1 = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin n\alpha_1\cos p\alpha_1\,d\alpha_1 = 0,$$

si n et p sont deux entiers quelconques, distincts toutefois dans les deux premières intégrales, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int N\rho\,ds = A_0Q_0(R)Q_0'(H)2\pi H - Q_1(R)Q_1'(H)\pi H(A_1\cos\alpha + B_1\sin\alpha) - \ldots$$
$$-\frac{1}{n}Q_n(R)Q_n'(H)\pi H(A_n\cos n\alpha + B_n\sin n\alpha) - \ldots.$$

Cette série peut s'écrire plus simplement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\int N\rho\,ds = {} & C_0Q_0(R) + (C_1\cos\alpha + D_1\sin\alpha)Q_1(R) + \ldots\\ & + (C_n\cos n\alpha + D_n\sin n\alpha)Q_n(R) + \ldots,\end{aligned}\right.$$

$C_0, C_1, \ldots, D_0, D_1, \ldots$ étant des coefficients que l'on déterminera par la condition que cette série soit sur le contour du cercle une fonction donnée de α.

22. Supposons ensuite que la fonction u satisfasse à l'équation (1) dans l'intervalle compris entre deux cercles concentriques, et que sa valeur soit donnée sur les contours de ces deux cercles.

Désignons par h le rayon du plus petit cercle et par H celui du plus grand. Représentons par r la distance du point (x, y) à un point quelconque du cercle extérieur, et par r_1 la distance de ce point à un point quelconque du cercle intérieur. D'après le théorème du

n° **14**, u pourra être mis sous la forme

$$u = \int N\rho H\, d\alpha_1 + \int N_1 \rho_1 h\, d\alpha_1,$$

ρ et ρ_1 étant des fonctions de α_1, qui ont 2π pour période, et N et N_1 ayant pour valeurs

$$N = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega,$$

$$N_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar_1\cos\omega)\log(r_1\sin^2\omega)\, d\omega.$$

La première intégrale qui compose u peut être représentée par la série (3), et il reste à nous occuper de la seconde.

Comme h est $< R$, on aura

$$\frac{1}{\pi}N_1 = Q'_0(R)\,Q_0(h) - \ldots$$
$$- \frac{1}{n}Q'_n(R)\,Q_n(h)(\cos n\alpha\cos n\alpha_1 + \sin n\alpha\sin n\alpha_1) - \ldots,$$

et le calcul qui a conduit à la formule (3) nous donnera

$$\int N_1\rho_1 h\, d\alpha_1 = E_0 Q'_0(R) + (E_1\cos\alpha + F_1\sin\alpha)\,Q'_1(R) + \ldots$$
$$+ (E_n\cos n\alpha + F_n\sin n\alpha)\,Q'_n(R) + \ldots.$$

Nous aurons donc

$$u = C_0 Q_0(R) + \ldots + (C_n\cos n\alpha + D_n\sin n\alpha)\,Q_n(R) + \ldots$$
$$+ E_0 Q'_0(R) + \ldots + (E_n\cos n\alpha + F_n\sin n\alpha)\,Q'_n(R) + \ldots,$$

et l'on pourra déterminer les coefficients d'après les deux conditions que u soit une fonction donnée de α pour $R = h$ et une autre fonction de α pour $R = H$.

25. Dans le premier cas que nous venons d'examiner et où la fonction u satisfait à l'équation (1) dans tout l'espace renfermé dans le cercle de rayon H, la fonction u peut être mise sous la forme plus simple

$$(4) \qquad u = \int M\rho\, ds \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\, d\omega.$$

En effet, on a (n° **15**)

$$M = Q_0(H)Q_0(R) + \ldots$$
$$+ 2\frac{a^{2n}}{(2.4.6\ldots 2n)^2}Q_n(H)Q_n(R)\cos n(\alpha - \alpha_1) + \ldots,$$

et le raisonnement qui nous a conduit à la formule (3) nous donnera de même

$$\int M\rho\, ds = C_0 Q_0(R) + \ldots + (C_n \cos n\alpha + D_n \sin n\alpha) Q_n(R) + \ldots,$$

C_0, C_1, D_1,... étant des coefficients indéterminés.

Mais si la fonction u satisfait à l'équation (1) seulement dans un espace annulaire, la formule (4) ne peut plus être adoptée.

Intégration de l'équation $\Delta u = -a^2 u$ dans l'intérieur d'une ellipse.

24. Supposons qu'une fonction satisfasse à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -a^2 u$$

dans l'intérieur d'une ellipse, et que sa valeur soit donnée sur le contour de cette ellipse.

Représentons la fonction u par

$$(2) \qquad \int N\rho\, ds,$$

ds étant un élément du contour. Adoptant les notations du n° **17**, posons

$$x = c\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \quad y = c\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha,$$

et représentons par

$$\beta = b$$

l'équation de l'ellipse du contour; un point de ce contour aura dans le système elliptique pour coordonnées la constante b et la variable α_1, qui peut varier de 0 à 2π.

La coordonnée β d'un point quelconque pris dans l'intérieur de l'ellipse étant $< b$, nous aurons (n° **18**)

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\mathrm{N} &= \mathrm{Q}_2(\beta, 0)\,\mathrm{Q}'(b, \mathrm{R}_0)\,\mathrm{P}_2(\alpha, 0)\,\mathrm{P}_2(\alpha_1, 0) + \ldots \\ &\quad - \frac{2}{g}\,\mathrm{Q}_2(\beta, g)\,\mathrm{Q}'(b, \mathrm{R}_g)\,\mathrm{P}_2(\alpha, g)\,\mathrm{P}_2(\alpha_1, g) - \ldots \\ &\quad - \frac{2}{g}\,\mathrm{Q}_1(\beta, g)\,\mathrm{Q}'\{b, \mathrm{R}'_g\}\,\mathrm{P}_1(\alpha, g)\,\mathrm{P}_1(\alpha_1, g) - \ldots. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a, en désignant par x_1, y_1 les coordonnées rectilignes d'un point du contour,

$$ds = d\alpha_1 : \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_1}{dy_1}\right)^2} = c\sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\,d\alpha_1$$

et

$$(b)\qquad u = \int \mathrm{N}\rho c\sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\,d\alpha_1$$

ρ n'est fonction que de α_1, et la quantité

$$\rho c\sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}$$

peut être mise sous la forme

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}_0\mathrm{P}_2(\alpha_1, 0) + \mathrm{A}_1\mathrm{P}_2(\alpha_1, 1) + \mathrm{A}_2\mathrm{P}_2(\alpha_1, 2) + \ldots + \mathrm{A}_g\mathrm{P}_2(\alpha_1, g) + \ldots \\ &\qquad + \mathrm{B}_1\mathrm{P}_1(\alpha_1, 1) + \mathrm{B}_2\mathrm{P}_1(\alpha_1, 2) + \ldots + \mathrm{B}_g\mathrm{P}_1(\alpha_1, g) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Désignons ensuite par P et P′ deux quelconques des fonctions P_1 et P_2; elles satisfont aux deux équations

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + (\mathrm{R} - 2h^2\cos 2\alpha)\,\mathrm{P} = 0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{P}'}{d\alpha^2} + (\mathrm{R}' - 2h^2\cos 2\alpha)\,\mathrm{P}' = 0.$$

En les combinant, on a

$$\mathrm{P}'\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} - \mathrm{P}\frac{d^2\mathrm{P}'}{d\alpha^2} + (\mathrm{R} - \mathrm{R}')\,\mathrm{P}\mathrm{P}' = 0.$$

Multiplions par $d\alpha$ et intégrons de 0 à 2π; nous aurons

$$\left(P'\frac{dP}{d\alpha} - P\frac{dP'}{d\alpha}\right)_0^{2\pi} + (R - R')\int_0^{2\pi} PP'd\alpha = 0.$$

Or P, P', et par suite leurs dérivées, ont pour période 2π; donc, si R est différent de R' ou P de P', l'équation précédente se réduit à

$$(d) \qquad \int_0^{2\pi} PP'd\alpha = 0.$$

Substituons les séries (a) et (c) dans la formule (b) et nous trouverons

$$(e)\left\{\begin{aligned} \int N\rho ds = {} & C_0 P_2(\alpha,0)Q_2(\beta,0) + C_1 P_2(\alpha,1)Q_2(\beta,1) + \ldots + C_g P_2(\alpha,g)Q_2(\beta,g) + \ldots \\ & + D_1 P_1(\alpha,1)Q_1(\beta,1) + \ldots + D_g P_1(\alpha,g)Q_1(\beta,g) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Si la valeur de u est donnée pour $\beta = b$, on déterminera facilement les coefficients C et D, en s'appuyant sur la formule (d).

Au lieu d'adopter la formule (2), on peut prendre

$$u = \int M\rho ds,$$

et l'on trouvera pour son développement la série du second membre de la formule (e), dont les coefficients pourront être déterminés par la condition du contour.

25. Supposons ensuite que la fonction u satisfasse à l'équation (1) dans l'intervalle compris entre deux ellipses homofocales, et que sa valeur soit donnée sur les contours de ces deux ellipses.

Soient respectivement

$$\beta = b, \quad \beta = f$$

les équations de l'ellipse extérieure et de l'ellipse intérieure. D'après le théorème du n° **14**, u pourra être mis sous la forme

$$u = \int N\rho ds + \int N_1\rho_1 ds_1,$$

la première intégrale se rapportant à l'ellipse extérieure et la seconde

à l'ellipse intérieure. La première intégrale est donnée par la formule (e), et il reste à nous occuper de la seconde.

Comme la coordonnée β d'un point quelconque renfermée entre les deux ellipses est $> f$, N_1 se développe de la manière suivante (n° **18**):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} N_1 = {} & Q_2(f, 0) Q'(\beta, R_0) P_2(\alpha, 0) P_2(\alpha_1, 0) + \ldots \\ & - \frac{2}{g} Q_2(f, g) Q'(\beta, R_g) P_2(\alpha, g) P_2(\alpha_1, g) - \ldots \\ & - \frac{2}{g} Q_1(f, g) Q'\{\beta, R'_g\} P_1(\alpha, g) P_1(\alpha_1, g) - \ldots\end{aligned}$$

On en conclura facilement que l'on a

$$\begin{aligned}\int N_1 \rho_1 ds_1 = {} & E_0 P_2(\alpha, 0) Q'(\beta, R_0) + \ldots + E_g P_2(\alpha, g) Q'(\beta, R_g) + \ldots \\ & + \ldots + F_g P_1(\alpha, g) Q'\{\beta, R'_g\} + \ldots\end{aligned}$$

Donc on aura

$$\begin{aligned}u = {} & P_2(\alpha, 0)[C_0 Q_2(\beta, 0) + E_0 Q'(\beta, R_0)] + \ldots + P_2(\alpha, g)[C_g Q_2(\beta, g) + E_g Q'(\beta, R_g)] + \\ & + \ldots + P_1(\alpha, g)[D_g Q_1(\beta, g) + F_g Q'\{\beta, R'_g\}] +\end{aligned}$$

En se rappelant la définition des fonctions Q' données au n° **18**, on en conclura

$$\begin{aligned}u = {} & P_2(\alpha, 0)[A_0 Q_2(\beta, 0) + B_0 Q_1[\beta, R_0]] + \ldots + P_2(\alpha, g)[A_g Q_2(\beta, g) + B_g Q_1[\beta, R_g]] + \\ & + \ldots + P_1(\alpha, g)[A'_g Q_1(\beta, g) + B'_g Q_2[\beta, R'_g]] +\end{aligned}$$

et l'on pourra déterminer les coefficients A_g, B_g, A'_g, B'_g d'après les deux conditions que u soit une fonction donnée de α pour $\beta = b$ et $\beta = f$.

Intégration de l'équation $\Delta u = -a^2 u$ dans l'intérieur d'une sphère.

26. Supposons qu'une fonction u satisfasse à l'équation

$$\Delta u = -a^2 u \tag{1}$$

dans l'intérieur d'une sphère du rayon A et que sa valeur soit donnée sur la surface de cette sphère; il s'agit de la déterminer.

D'après le théorème démontré au n° **15**, la fonction u peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad u = \int \frac{\cos nr}{r} \rho \, d\sigma,$$

ρ désignant une fonction d'un point de la surface, r la distance d'un point de la surface au point (x, y, z); de plus $d\sigma$ est l'élément de la surface, et l'intégrale se rapporte à la surface entière de la sphère.

Supposons que les axes rectangulaires passent par le centre de la sphère, et prenons des coordonnées sphériques, en posant

$$x = \mathrm{R}\cos\theta, \quad y = \mathrm{R}\sin\theta\cos\psi, \quad z = \mathrm{R}\sin\theta\sin\psi;$$

les coordonnées sphériques d'un point quelconque de la surface de la sphère seront A, θ_1, ψ_1, et la distance r du point (x, y, z) à ce point de la sphère sera donnée par la formule

$$r^2 = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{AR}\cos\omega + \mathrm{R}^2$$

avec

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\psi - \psi_1);$$

de plus on aura

$$d\sigma = \mathrm{A}^2 \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1.$$

R étant $< \mathrm{A}$, on a (n° **20**)

$$(3) \quad \frac{\cos nr}{r} = \mathrm{S}_0(\mathrm{A})\mathrm{T}_0(\mathrm{R}) + \mathrm{S}_1(\mathrm{A})\mathrm{T}_1(\mathrm{R})\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{S}_n(\mathrm{A})\mathrm{T}_n(\mathrm{R})\mathrm{X}_n + \ldots;$$

ρ est une fonction d'un point de la surface de la sphère. Or désignons par Y_n la fonction

$$\mathrm{Y}_n = \sum_{l=0}^{l=n} (\mathrm{A}_l \cos l\psi + \mathrm{B}_l \sin l\psi)\,\Theta_{n,l}$$

avec

$$\Theta_{n,l} = \cos^l\theta \left[\cos^{n-l}\theta - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-l-2}\theta \right.$$
$$\left. + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-l-4}\theta - \ldots\right],$$

et représentons par Y'_n ce que devient Y_n quand on y remplace θ et ψ par θ_1 et ψ_1; d'après un théorème bien connu de Laplace, ρ peut être développé en une série de cette forme

$$(4) \qquad \rho = Y'_0 + Y'_1 + Y'_2 + \ldots + Y'_n + \ldots.$$

Substituons dans la formule (2) les séries (3) et (4) et employons les formules

$$\int X_n Y'_p \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1 = 0, \qquad \int X_n Y'_n \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\psi_1 = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n;$$

nous aurons

$$(5) \qquad u = T_0(R) J_0 + T_1(R) J_1 + \ldots + T_n(R) J_n + \ldots,$$

en désignant par J_n une fonction telle que Y_n, et qui renferme $2n+1$ constantes arbitraires.

Alors on déterminera les coefficients renfermés dans les Y_n de cette série, en se servant de la condition que, pour $R = A$, la série a une valeur donnée $F(\theta, \psi)$; d'où résulte

$$T_0(A) J_0 + T_1(A) J_1 + \ldots + T_n(A) J_n + \ldots = F(\theta, \psi).$$

Au lieu de représenter la fonction u par la formule (2), on pourrait la représenter par la formule

$$(6) \qquad u = \int \frac{\sin ar}{r} \rho \, d\sigma;$$

car, si l'on suit littéralement les raisonnements qui précèdent, au lieu de la formule (3), on aura la suivante (n° **19**) :

$$\frac{\sin ar}{ar} = T_0(A) T_0(R) X_0 + \frac{a^2}{3} T_1(A) T_1(R) X_1 + \frac{a^4}{3^2 . 5} T_2(A) T_2(R) X_2 + \ldots$$

et l'on sera encore conduit à la formule (5).

27. Supposons ensuite qu'une fonction u satisfasse à l'équation (1) seulement dans l'intervalle compris entre la sphère de rayon A et une sphère concentrique de rayon plus petit α; on suppose, de plus, sa

valeur donnée sur les surfaces des deux sphères, et il s'agit d'en déduire la fonction u.

La formule (6) n'est plus admissible; mais on sait, au contraire, que la fonction peut être représentée par la formule (2). En conséquence, posons

$$u = \int \frac{\cos ar}{r} \rho A^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\psi_1 + \int \frac{\cos ar_1}{r_1} \rho' \alpha^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\psi_1,$$

r et r_1 étant les distances du point dont les coordonnées sphériques sont R, θ, ψ, et situé entre les deux sphères aux points situés sur les deux sphères, et dont les coordonnées sont A, θ_1, ψ_1 et α, θ_1, ψ_1.

D'après le numéro précédent, on aura

$$\int \frac{\cos ar}{r} \rho A^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\psi_1 = T_0(R)J_0 + T_1(R)J_1 + \ldots + T_n(R)J_n + \ldots.$$

Ensuite, comme α est $> R$, on aura

$$\frac{\cos ar_1}{r_1} = T_0(\alpha)S_0(R) + T_1(\alpha)S_1(R)X_1 + \ldots + T_n(\alpha)S_n(R)X_n + \ldots,$$

et l'on trouvera de la même manière

$$\int \frac{\cos ar_1}{r_1} \rho' \alpha^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\psi_1 = S_0(R)Y_0 + S_1(R)Y_1 + \ldots,$$

les fonctions $Y_0, Y_1, \ldots$ étant des Y_n, semblables à ceux du n° **26**.

Enfin on déterminera les coefficients renfermés dans les fonctions J_n et Y_n, en s'appuyant sur ce que la fonction u a des valeurs données pour $R = A$ et $R = \alpha$.

Intégration de l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \Delta u$ dans le cas de deux dimensions.

28. Imaginons une fonction qui satisfasse dans l'intérieur d'une courbe s à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = m^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

qui est celle qui régit la vibration transversale d'une membrane.

Nous avons vu dans le n° 6 que l'on a une solution de cette équation en posant

$$(A)\quad \begin{cases} u = \int \psi(r, t, \alpha_1)\,ds, \\ \psi(r, t, \alpha_1) = \displaystyle\int_0^{\pi} F(r\cos\omega + mt, \alpha_1)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega, \end{cases}$$

F étant une fonction arbitraire de deux variables et α_1 une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s. Il ne reste plus qu'à voir si cette formule a la généralité suffisante, et c'est ce que nous allons vérifier en l'appliquant au cas où la courbe s du contour est un cercle, une ellipse, ou composée soit de deux cercles concentriques, soit de deux ellipses homofocales.

29. Supposons d'abord que le contour soit un cercle, et adoptons des coordonnées polaires R et α dont l'origine soit au centre du cercle; la coordonnée angulaire α d'un point du contour est la quantité qui détermine un point quelconque de ce contour, et que nous avons appelée α_1.

Prenons pour $F(r, \alpha_1)$ une fonction paire en r donnée par une série de la forme suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} F(r, \alpha_1) = A_{0,0}\cos(\lambda_{0,0}r) + A_{0,1}\cos(\lambda_{0,1}r) + A_{0,2}\cos(\lambda_{0,2}r) + \ldots \\ \qquad + \cos\alpha_1[A_{1,0}\cos(\lambda_{1,0}r) + A_{1,1}\cos(\lambda_{1,1}r) + \ldots] \\ \qquad + \sin\alpha_1[B_{1,0}\cos(\lambda_{1,0}r) + B_{1,1}\cos(\lambda_{1,1}r) + \ldots] \\ \qquad + \cos 2\alpha_1[A_{2,0}\cos(\lambda_{2,0}r) + \ldots] \\ \qquad + \sin 2\alpha_1[B_{2,0}\cos(\lambda_{2,0}r) + \ldots] \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Remplaçons r par $r\cos\omega + mt$, et, en n'écrivant que le terme général, nous aurons

$$\begin{aligned} F(r\cos\omega + mt, \alpha) = \ldots &+ A_{n,p}\cos n\alpha\cos[\lambda_{n,p}(r\cos\omega + mt)] \\ &+ B_{n,p}\sin n\alpha\cos[\lambda_{n,p}(r\cos\omega + mt)] + \ldots. \end{aligned}$$

De là il résulte

$$\psi(r, t, \alpha_1) = \ldots + (A_{n,p} \cos n\alpha_1 + B_{n,p} \sin n\alpha_1) \cos(\lambda_{n,p} mt)$$
$$\times \int_0^\pi \cos(\lambda_{n,p} r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega) d\omega + \ldots.$$

Or, R étant plus petit que le rayon A du cercle de contour, on a (*voir* n° **16**)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega) d\omega$$
$$= Q_0(R, \lambda) Q'_0(A, \lambda) - \ldots$$
$$- \frac{1}{n} Q_n(R, \lambda) Q'_n(A, \lambda) (\cos n\alpha \cos n\alpha_1 + \sin n\alpha \sin n\alpha_1) - \ldots,$$

en indiquant dans les fonctions Q la quantité λ qui y entre.

On a donc

$$\psi(r, t, \alpha_1) = \ldots + (A_{n,p} \cos n\alpha_1 + B_{n,p} \sin n\alpha_1) \cos(\lambda_{n,p} mt)$$
$$\times \left[Q_0(R) Q'_0(A) - \ldots - \frac{1}{n} Q_n(R) Q'_n(A) \cos n(\alpha - \alpha_1) - \ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, par suite,

$$u = \int_0^{2\pi} \psi(r, t, \alpha_1) A d\alpha_1$$
$$= \ldots - (A_{n,p} \cos n\alpha + B_{n,p} \sin n\alpha) \frac{A}{n} \pi^2 Q'_n(A) Q_n(R) \cos(\lambda_{n,p} mt) - \ldots,$$

et cette formule peut s'écrire plus simplement

$$(a) \quad u = \ldots + (C_{n,p} \cos n\alpha + D_{n,p} \sin n\alpha) Q_n(R, \lambda_{n,p}) \cos(\lambda_{n,p} mt) + \ldots.$$

On trouve bien dans le second membre la solution générale de l'équation (1) dans le cas où $\frac{du}{dt}$ est nul pour $t = 0$. (*Voir* mon *Mémoire de la membrane elliptique*, t. XIII de ce Journal, p. 143.)

Si, au contraire, u est nul pour $t = 0$, on prendra pour $F(r, \alpha)$ une

fonction impaire par rapport à r, et l'on posera

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(r, \alpha_1) = {} & A'_{0,0}\sin(\lambda_{0,0}r) + A'_{0,1}\sin(\lambda_{0,1}r) + \ldots \\ & + \cos\alpha_1[A'_{1,0}\sin(\lambda_{1,0}r) + A'_{1,1}\sin(\lambda_{1,1}r) + \ldots] \\ & + \sin\alpha_1[B'_{1,0}\sin(\lambda_{1,0}r) + \ldots] \\ & + \cos 2\alpha_1[A'_{2,0}\sin(\lambda_{2,0}r) + \ldots] \\ & + \sin 2\alpha_1[B'_{2,0}\sin(\lambda_{2,0}r) + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et, par le calcul précédent, on trouvera

$$(b)\quad u = \ldots + (C'_{n,p}\cos n\alpha + D'_{n,p}\sin n\alpha)Q_n(R, \lambda_{n,p})\sin(\lambda_{n,p}mt) + \ldots$$

Enfin, dans le cas le plus général, u est la somme des séries (a) et (b).

Si u désigne le déplacement transversal d'un point d'une membrane circulaire de rayon A, les quantités λ se déterminent d'après la condition que $Q_n(R, \lambda)$ soit nul pour $R = A$, et à chaque valeur entière de n correspondent une infinité de valeurs de λ.

Les coefficients C, D, C', D', qui se trouvent dans les séries (a) et (b), se déterminent, par un calcul bien connu, d'après les conditions que u et $\frac{du}{dt}$ aient des valeurs données pour $t = 0$. D'après les valeurs que l'on en déduit, on pourrait démontrer que les séries (2) et (3) sont convergentes; nous pourrons revenir sur ce point dans une autre occasion.

30. Supposons maintenant que la courbe s se compose de la même circonférence de rayon A et d'une circonférence de rayon plus petit a. La fonction u satisfait donc à l'équation (1) dans l'intervalle compris entre ces deux cercles.

Nous prendrons pour solution la formule

$$u = \int \psi(r, t, \alpha_1)A\,d\alpha_1 + \int \psi_1(r_1, t, \alpha_1)a\,d\alpha_1;$$

la première intégrale est définie d'après ce qui précède, et pour la seconde nous posons

$$\psi_1(r_1, t, \alpha_1) = \int_0^\pi F_1(r_1\cos\omega + mt, \alpha_1)\log(r_1\sin^2\omega)\,d\omega,$$

r_1 désignant la distance d'un point (x, y) compris entre les deux cercles à un point du contour intérieur.

En changeant les lettres A et B en $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ dans $\psi(r, t, \alpha_1)$ pour désigner d'autres constantes, nous aurons, si $F_1(r_1, \alpha)$ est pair en r_1,

$$\psi_1(r_1, t, \alpha_1) = \ldots + (\mathfrak{A}_{n,p}\cos n\alpha_1 + \mathfrak{B}_{n,p}\sin n\alpha_1)\cos(\lambda_{n,p}mt)$$
$$\times \int_0^\pi \cos(\lambda_{n,p}r_1\cos\omega)\log(r_1\sin^2\omega)d\omega + \ldots$$

Le rayon a étant $< R$, on aura

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r_1\cos\omega)\log(r_1\sin^2\omega)d\omega$$
$$= Q_0(a,\lambda)Q_0'(R,\lambda) - \ldots - \frac{1}{n}Q_n(a,\lambda)Q_n'(R,\lambda)\cos n(\alpha - \alpha_1) - \ldots,$$

et, par suite, on a

$$\int \psi_1(r, t, \alpha_1)\,a\,d\alpha_1$$
$$= \ldots - (\mathfrak{A}_{n,p}\cos n\alpha + \mathfrak{B}_{n,p}\sin n\alpha)\frac{a\pi^2}{n}Q_n(a)Q_n'(R)\cos(\lambda_{n,p}mt) - \ldots,$$

ou, plus simplement,

$$= \ldots + (\mathfrak{C}_{n,p}\cos n\alpha + \mathfrak{D}_{n,p}\sin n\alpha)Q_n'(R,\lambda_{n,p})\cos(\lambda_{n,p}mt) - \ldots.$$

Donc l'expression de u est de cette forme

$$u = \ldots + (C_{n,p}\cos n\alpha + D_{n,p}\sin n\alpha)Q_n(R,\lambda_{n,p})\cos(\lambda_{n,p}mt) + \ldots$$
$$+ (\mathfrak{C}_{n,p}\cos n\alpha + \mathfrak{D}_{n,p}\sin n\alpha)Q_n'(R,\lambda_{n,p})\cos(\lambda_{n,p}mt) + \ldots$$

Si u est assujetti à s'annuler sur les deux contours, le coefficient de $\cos(\lambda_{n,p}mt)$ est assujetti à la même condition. On doit donc faire

$$\frac{\mathfrak{D}_{n,p}}{\mathfrak{C}_{n,p}} = \frac{D_{n,p}}{C_{n,p}},$$

et $\lambda_{n,p}$, ainsi que le rapport de $C_{n,p}$ à $\mathfrak{C}_{n,p}$, est donné par les deux équations

$$C_{n,p}Q_n(A,\lambda_{n,p}) + \mathfrak{C}_{n,p}Q_n'(A,\lambda_{n,p}) = 0,$$
$$C_{n,p}Q_n(a,\lambda_{n,p}) + \mathfrak{C}_{n,p}Q_n'(a,\lambda_{n,p}) = 0.$$

La dernière expression de u a été obtenue dans la supposition que $\frac{du}{dt}$ soit nul pour $t = 0$, ou que les fonctions $F(r, \alpha)$ et $F_1(r, \alpha)$ sont paires par rapport à r. Suivant ce qui a été fait au numéro précédent, on prendra dans le cas général pour $F(r, \alpha)$, $F_1(r, \alpha)$ des fonctions impaires en r, et l'on ajoutera l'expression qui en résulte pour u à l'expression précédente.

31. Passons au cas où la fonction u satisfait à l'équation (1) dans l'intérieur d'une ellipse. Appliquons la formule (A).

Adoptant les notations des nos **17** et **24**, on aura

$$\beta = b$$

pour l'équation du contour de l'ellipse; β étant constant sur ce contour, la coordonnée α est propre à déterminer un point de ce contour, et nous la représentons sur cette ligne par α_1. Nous avons

$$u = \int \psi(r, t, \alpha_1)\, c\sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\, d\alpha_1.$$

La fonction $F(r, \alpha_1)$ étant arbitraire, posons

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} c\sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\, F(r, \alpha_1) = {} & A_{0,0} P_2(\alpha_1, 0, \lambda_{0,0}) \cos(\lambda_{0,0} r) \\ & + A_{0,1} P_2(\alpha_1, 0, \lambda_{0,1}) \cos(\lambda_{0,1} r) + \ldots \\ & + [A_{1,0} P_2(\alpha_1, 1, \lambda_{1,0}) \cos(\lambda_{1,0} r) \\ & \quad + A_{1,1} P_2(\alpha_1, 1, \lambda_{1,1}) \cos(\lambda_{1,1} r) + \ldots] \\ & + [B_{1,0} P_1(\alpha_1, 1, \lambda'_{1,0}) \cos(\lambda'_{1,0} r) \quad] \\ & + [A_{2,0} P_2(\alpha_1, 2, \lambda_{2,0}) \cos(\lambda_{2,0} r) + \ldots] \\ & + [B_{2,0} P_1(\alpha_1, 2, \lambda'_{2,0}) \cos(\lambda'_{2,0} r) + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

a fonction $P(\alpha, g, \lambda)$ étant donnée par l'équation

$$\frac{d^2 P}{d\alpha^2} + (R - 2\lambda^2 c^2 \cos 2\alpha) P = 0,$$

dans laquelle R est une constante choisie de manière que P ait pour période 2π et qui se réduit au carré g^2 d'un nombre entier pour $c = 0$.

On en conclura (n° **28**)

$$c\sqrt{\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)^2 - \cos^2\alpha_1}\,\psi(r, t, \alpha_1) = \ldots$$

$$+ A_{g,i} P_2(\alpha_1, g, \lambda_{g,i}) \int_0^\pi \cos[\lambda_{g,i}(r\cos\omega + mt)] \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$

$$+ B_{g,i} P_1(\alpha_1, g, \lambda'_{g,i}) \int_0^\pi \cos[\lambda'_{g,i}(r\cos\omega + mt)] \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$

ou

$$= \ldots + A_{g,i} P_2(\alpha_1, g, \lambda_{g,i}) \cos(\lambda_{g,i} mt) \int_0^\pi \cos(\lambda_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$

$$+ B_{g,i} P_1(\alpha_1, g, \lambda'_{g,i}) \cos(\lambda'_{g,i} mt) \int_0^\pi \cos(\lambda'_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega + \ldots$$

On tire de là

$$u = \ldots + A_{g,i} \cos(\lambda_{g,i} mt) \int_0^{2\pi} P_2(\alpha_1, g, \lambda_{g,i}) \int_0^\pi \cos(\lambda_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, d\alpha_1 + \ldots$$

$$+ B_{g,i} \cos(\lambda'_{g,i} mt) \int_0^{2\pi} P_1(\alpha_1, g, \lambda'_{g,i}) \int_0^\pi \cos(\lambda'_{g,i} r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, d\alpha_1 + \ldots$$

Or, β étant $< b$, on a (n° **18**), λ étant le même dans toutes les fonctions P,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r\cos\omega) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega$$

$$= Q_2(\beta, 0)\, Q'(b, R_0)\, P_2(\alpha, 0)\, P_2(\alpha_1, 0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{2}{g} Q_2(\beta, g)\, Q'(b, R_g)\, P_2(\alpha, g)\, P_2(\alpha_1, g)$$

$$- \frac{2}{g} Q_1(\beta, g)\, Q'\{b, R'_g\}\, P_1(\alpha, g)\, P_1(\alpha_1, g) - \ldots$$

Or, si λ est le même dans deux fonctions P, dont on désigne la se-

conde par P′, on a (n° **24**)

$$\int_0^{2\pi} PP' d\alpha = 0.$$

Donc u se réduit à

$$u = \ldots - \frac{2}{g} A_{g,i} \cos(\lambda mt) Q_2(\beta, g, \lambda) P_2(\alpha, g, \lambda) Q'(b, R_g, \lambda) \int_0^{2\pi} P_2(\alpha_1, g)^2 d\alpha_1 - \ldots$$
$$- \frac{2}{g} B_{g,i} \cos(\lambda' mt) Q_1(\beta, g, \lambda') P_1(\alpha, g, \lambda') Q'(b, R'_g, \lambda') \int_0^{2\pi} P_1(\alpha_1, g)^2 d\alpha_1 - \ldots$$

et l'on peut écrire plus simplement

$$u = \ldots + H_{g,i} P_2(\alpha, g, \lambda_{g,i}) Q_2(\beta, g, \lambda_{g,i}) \cos(\lambda_{g,i} mt) + \ldots$$
$$+ K_{g,i} P_1(\alpha, g, \lambda'_{g,i}) Q_1(\beta, g, \lambda'_{g,i}) \cos(\lambda'_{g,i} mt) + \ldots,$$

H et K désignant de nouvelles constantes arbitraires.

En mettant dans la formule (c) des sinus au lieu des cosinus, on aurait une formule toute semblable à la précédente, mais dans laquelle les cosinus des arcs multiples de t seraient remplacés par les sinus des mêmes arcs. Dans le cas le plus général, u est la somme des deux séries obtenues.

Si u est nul sur le contour de l'ellipse, les quantités λ et λ' sont déterminées par les deux équations

$$Q_2(b, g, \lambda) = 0, \quad Q_1(b, g, \lambda') = 0,$$

et au nombre entier g correspondent une infinité de valeurs de λ et λ'.

D'ailleurs la forme que nous venons de trouver pour u est précisément celle que nous avons obtenue dans notre Mémoire sur la membrane elliptique pour la vibration transversale de cette membrane. (T. XIII de ce Journal, p. 200.)

32. Si la courbe s se compose de la même ellipse $\beta = b$ et d'une ellipse homofocale plus petite $\beta = h$, on opérera comme dans les nu-

méros précédents et l'on trouvera, si $\frac{du}{dt}$ s'annule pour $t = 0$,

$$\begin{aligned} u = \ldots &+ P_2(\alpha, g, \lambda)[C\,Q_2(\beta, g, \lambda) + D\,Q'(\beta, R_g, \lambda)]\cos(\lambda mt) + \ldots \\ &+ P_1(\alpha, g, \lambda')[C'Q_1(\beta, g, \lambda') + D'Q'(\beta, R'_g, \lambda')]\cos(\lambda' mt) + \ldots \end{aligned}$$

Si u est assujetti à s'annuler sur les deux contours $\beta = b$, $\beta = h$, on déterminera λ et $\frac{D}{C}$ par les deux équations

$$\begin{aligned} CQ_2(b, g, \lambda) + DQ'(b, R_g, \lambda) &= 0, \\ CQ_2(h, g, \lambda) + DQ'(h, R_g, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

et l'on calculera λ' et $\frac{D'}{C'}$ de la même manière.

En se rappelant la définition des fonctions Q′ données au n° **18**, on préférera à l'expression précédente la suivante

$$\begin{aligned} u = \ldots &+ P_2(\alpha, g, \lambda)[C\,Q_2(\beta, g, \lambda) + D\,Q_1[\beta, R_g, \lambda]]\cos(\lambda mt) + \ldots \\ &+ P_1(\alpha, g, \lambda)[C'Q_1(\beta, g, \lambda') + D'Q_2[\beta, R'_g, \lambda']]\cos(\lambda' mt) + \ldots, \end{aligned}$$

C, D, C′, D′ étant encore des constantes; et les quantités Q qui se trouvent dans cette dernière formule sont entièrement déterminées.

De ce qui précède, on conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Si une fonction u de deux coordonnées rectangulaires x, y et du temps t satisfait à l'équation*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = m^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right)$$

dans l'intérieur d'une courbe s, cette fonction est de la forme

$$u = \int \psi(r, t, v)\,ds$$

avec

$$\psi(r, t, v) = \int_0^\pi F(r\cos\omega + mt, v)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

en désignant par $F(r, v)$ une fonction arbitraire de deux variables et par v une coordonnée propre à déterminer un point du contour. De plus

si l'on prend $F(r, v)$ impair en r, u sera nul pour $t = 0$, et si l'on prend $F(r, v)$ pair en r, $\frac{du}{dt}$ sera nul pour $t = 0$.

En effet si $F(r, v)$ est impair en r, on a

$$\psi(r, o, v) = \int_0^\pi F(r\cos\omega, v)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

qui est nul, puisque pour $\omega = \omega'$ et $\omega = \pi - \omega'$, on a deux éléments égaux et de signe contraire; donc $u = 0$ pour $t = 0$.

Si $F(r, v)$ est pair en r, sa dérivée par rapport à r sera impaire, et l'on en conclut de même que $\frac{du}{dt} = 0$ pour $t = 0$.

Sur l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = m^2\Delta u$ dans le cas de trois dimensions.

33. Imaginons une fonction qui satisfait dans l'intérieur d'une surface σ à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = m^2\Delta u,$$

qu'on rencontre dans l'étude des petits mouvements d'un gaz ou dans celle du mouvement vibratoire d'un corps solide.

Nous avons vu, dans le n° **6**, que l'on a une solution de cette équation en posant

$$(2) \qquad u = \int \frac{f(r + mt, \theta, \psi) - F(r - mt, \theta, \psi)}{r}\,d\sigma,$$

f et F étant deux fonctions arbitraires de trois variables et θ, ψ deux coordonnées propres à déterminer un point de la surface σ. Il reste à vérifier que cette formule a la généralité suffisante, et c'est ce que nous allons faire en supposant que σ soit une sphère.

Il est aisé de voir que u peut se décomposer en les deux parties

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1 = \int \frac{\chi(r + mt, \theta, \psi) + \chi(r - mt, \theta, \psi)}{r}\,d\sigma, \\ u_2 = \int \frac{\mu(r + mt, \theta, \psi) - \mu(r - mt, \theta, \psi)}{r}\,d\sigma, \end{cases}$$

χ et μ étant deux nouvelles fonctions de trois variables.

Remarquons que u_2 est une fonction qui s'annule pour $t = 0$ et que la dérivée de u_1 par rapport à t jouit de la même propriété.

On peut décomposer les fonctions u_1 et u_2 elles-mêmes en deux parties, en prenant pour les fonctions $\chi(r, \theta, \psi)$ et $\mu(r, \theta, \psi)$ successivement des fonctions paires et des fonctions impaires par rapport a r.

Dans le cas où la surface σ est une sphère, on prendra des coordonnées sphériques dont l'origine soit au centre de la sphère, et l'on posera

$$(4) \qquad x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta\cos\psi, \quad z = R\sin\theta\sin\psi.$$

Nous prendrons donc pour les coordonnées θ et ψ, qui se trouvent dans les formules (2) et (3), les quantités θ, ψ définies par les équations (4); toutefois, sur la surface de la sphère, nous les désignerons par θ' et ψ'.

Posons, comme au n° **26**,

$$\Theta_{n,l} = \cos^l\theta\left[\cos^{n-l}\theta - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-l-2}\theta + \ldots\right],$$

et alors la quantité

$$\sum_{l=0}^{l=n}(A_l\cos l\psi + B_l\sin l\psi)\Theta_{n,l},$$

qui renferme $2n+1$ constantes, est un Y_n.

Supposons d'abord $\chi(r, \theta, \psi)$ pair en r dans u_1 et faisons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 2\chi(r,\theta,\psi) = &\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi[A_{n,l,0}\cos(\rho_{n,0}r) + \ldots + A_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r) + \ldots] \\ &+ \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi[B_{n,l,0}\cos(\rho_{n,0}r) + \ldots + B_{n,l,i}\cos(\rho_{n,i}r) + \ldots]. \end{aligned}\right.$$

A chaque valeur de n donnée par le premier Σ correspondent des valeurs de l données par le second Σ comprises entre 0 et n. De plus,

à chaque valeur de n correspondent une infinité de valeurs de la constante ρ.

Désignons par Θ' ce que devient Θ quand on y remplace θ par θ', et nous aurons

$$\frac{\chi(r+mt,\theta',\psi')+\chi(r-mt,\theta',\psi')}{r}$$
$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta'_{n,l}\cos l\psi'\left[A_{n,l,0}\frac{\cos(\rho_{n,0}t)}{r}\cos(m\rho_{n,0}t)+\ldots+A_{n,l,i}\frac{\cos(\rho_{n,i}r)}{r}\cos(m\rho_{n,i}t)+\ldots\right]$$
$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta'_{n,l}\sin l\psi'\left[B_{n,l,0}\frac{\cos(\rho_{n,0}r)}{r}\cos(m\rho_{n,0}t)+\ldots+B_{n,l,i}\frac{\cos(\rho_{n,i}r)}{r}\cos(m\rho_{n,i}t)+\ldots\right].$$

Or, pour un point quelconque intérieur à la sphère, R étant plus petit que le rayon a de cette sphère, on a (n° **20**)

$$(a)\qquad \begin{aligned}\frac{\cos(\rho r)}{r}&=S_0(a,\rho)T_0(R,\rho)+S_1(a,\rho)T_1(R,\rho)X_1+\ldots\\&\quad+S_n(a,\rho)T_n(R,\rho)X_n+\ldots,\end{aligned}$$

X_n étant une fonction entière de

$$\cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi').$$

Les fonctions $\Theta_{n,l}\cos l\psi$, $\Theta_{n,l}\sin l\psi$ étant des cas particuliers des fonctions Y_n, on a, n et p étant deux nombres entiers différents,

$$\int X_p\Theta'_{n,l}\cos l\psi'd\sigma=0,\quad \int X_p\Theta'_{n,l}\sin l\psi'd\sigma=0,$$
$$\int X_n\Theta'_{n,l}\cos l\psi'd\sigma=\frac{4\pi}{2n+1}\Theta_{n,l}\cos l\psi,$$
$$\int X_n\Theta'_{n,l}\sin l\psi'd\sigma=\frac{4\pi}{2n+1}\Theta_{n,l}\sin l\psi.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}u_1=\ldots&+A_{n,l,i}S_n(a,\rho_{n,i})T_n(R,\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\int X_n\Theta'_{n,l}\cos l\psi'd\sigma+\ldots\\&+B_{n,l,i}S_n(a,\rho_{n,i})T_n(R,\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\int X_n\Theta'_{n,l}\sin l\psi'd\sigma+\ldots,\end{aligned}$$

et ensuite

$$u_1 = \ldots + A_{n,l,i}\frac{4\pi}{2n+1} S_n(a, \rho_{n,i}) T_n(R, \rho_{n,i}) \cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\cos l\psi + \ldots$$
$$+ B_{n,l,i}\frac{4\pi}{2n+1} S_n(a, \rho_{n,i}) T_n(R, \rho_{n,i}) \cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\sin l\psi + \ldots,$$

ou, plus simplement,

$$u_1 = \ldots + C_{n,l,i} T_n(R, \rho_{n,i})\Theta_{n,l}\cos l\psi \cos(m\rho_{n,i}t) + \ldots$$
$$+ D_{n,l,i} T_n(R, \rho_{n,i})\Theta_{n,l}\sin l\psi \cos(m\rho_{n,i}t) + \ldots.$$

Cette expression peut s'écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 = &\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi \sum_{\rho}\cos(m\rho_{n,i}t) C_{n,l,i} T_n(R, \rho_{n,i}) \\ &+ \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi \sum_{\rho}\cos(m\rho_{n,i}t) D_{n,l,i} T_n(R, \rho_{n,i}). \end{aligned}\right.$$

Supposons que u, qui satisfait à l'équation (1), ait sa dérivée nulle pour $t = 0$, et que u s'annule sur la surface de la sphère. Alors la valeur de u sera donnée par l'expression précédente, et tous les termes seront nuls pour $R = a$, en sorte que les quantités ρ seront données par l'équation

$$(b)\qquad T_n(a, \rho) = 0.$$

Supposons, en second lieu, $\chi(r, \theta, \psi)$ impair en r dans u_1, et faisons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} 2\chi(r, \theta, \psi) = &\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi [A_{n,l,0}\sin(\rho_{n,0}r) + \ldots + A_{n,l,i}\sin(\rho_{n,i}r) + \ldots] \\ &+ \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi [B_{n,l,0}\sin(\rho_{n,0}r) + \ldots + B_{n,l,i}\sin(\rho_{n,i}r) + \ldots]. \end{aligned}\right.$$

Nous aurons à faire des calculs tout semblables aux précédents. Au

lieu de la formule (a), on aura à appliquer la formule

$$\frac{\sin(\rho r)}{r} = T_0(a)T_0(R)X_0 + \frac{\rho^2}{3}T_1(a)T_1(R)X_1 + \ldots$$
$$+ \frac{\rho^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}T_n(a)T_n(R)X_n + \ldots,$$

et l'on trouvera

$$u_1 = \ldots + \frac{4\pi\rho_{n,i}^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n+1)^2}A_{n,l,i}T_n(a,\rho_{n,i})T_n(R,\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\cos l\psi + \ldots$$
$$+ \frac{4\pi\rho_{n,i}^{2n}}{3^2.5^2\ldots(2n+1)^2}B_{n,l,i}T_n(a,\rho_{n,i})T_n(R,\rho_{n,i})\cos(m\rho_{n,i}t)\Theta_{n,l}\sin l\psi + \ldots,$$

par suite, on arrivera encore à la formule (6).

Toutefois considérons le cas où u est nul sur la surface de la sphère; alors on aura l'équation (b), et, comme $T_n(a, \rho_{n,i})$ se trouve en facteur dans le terme général, on en conclura que u_1 sera nul.

Donc si $\chi(r, \theta, \psi)$ est impair en r dans l'expression de u_1, et que cette expression s'annule à la surface de la sphère, elle s'annulera pour tout point intérieur à cette sphère.

Passons à l'expression de u_2. Supposons d'abord $\mu(r, \theta, \psi)$ impair en r, et prenons pour $\mu(r, \theta, \psi)$ l'expression (7), nous trouverons pour u_2 une formule toute semblable à la formule (6), avec le seul changement de $\cos(m\rho t)$ en $\sin(m\rho t)$.

Si l'on suppose, au contraire, $\mu(r, \theta, \psi)$ pair en r et qu'on représente cette fonction par le second membre de la formule (5), on arrivera encore à la même formule. Mais, suivant une remarque précédente, le terme général renferme $T_n(a, \rho_{n,i})$ en facteur; ce qui fait que u_2 s'annule en tout point intérieur à la surface, s'il s'annule à la surface.

34. Supposons ensuite que la surface σ se compose encore de la même sphère de rayon a et de plus d'une sphère concentrique de rayon $b < a$. Ainsi la fonction u satisfait à l'équation (1) dans l'espace renfermé entre les deux sphères.

Pour éviter des longueurs inutiles, supposons que $\frac{du}{dt}$ soit nul

pour $t = 0$, et l'on réduira alors u à

$$u_1 = \int \frac{\chi(r + mt, \theta, \psi) + \chi(r - mt, \theta, \psi)}{r} d\sigma$$
$$+ \int \frac{\chi_1(r_1 + mt, \theta, \psi) + \chi_1(r_1 - mt, \theta, \psi)}{r_1} d\sigma_1,$$

σ étant la sphère de rayon a, σ_1 la sphère de rayon b, et r_1 est la distance du point (x, y, z) à un point de la sphère de rayon b, situé sur l'élément $d\sigma_1$.

On commencera par prendre pour $\chi(r, \theta, \psi)$ la formule (5), et la première intégrale qui compose u_1 sera égale au second membre de la formule (6).

On prendra ensuite pour $\chi_1(r_1, \theta, \psi)$ l'expression semblable

$$2\chi_1(r_1, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=n} \Theta_{n,l} \cos l\psi \,[A'_{n,l,0} \cos(\rho_{n,0} r_1) + \ldots$$
$$+ A'_{n,l,i} \cos(\rho_{n,i} r_1) + \ldots]$$
$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=n} \Theta_{n,l} \sin l\psi \,[B'_{n,l,0} \cos(\rho_{n,0} r_1) + \ldots$$
$$+ B'_{n,l,i} \cos(\rho_{n,i} r_1) + \ldots].$$

Comme R est $> b$, on a

$$\frac{\cos(\rho r_1)}{r_1} = S_0(R, \rho) T_0(b, \rho) + S_1(R, \rho) T_1(b, \rho) X_1 + \ldots$$
$$+ S_n(R, \rho) T_n(b, \rho) X_n + \ldots,$$

et l'on trouvera pour la seconde partie de u_1

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=n} \Theta_{n,l} \cos l\psi \sum_i \cos(m\rho_{n,i} t)\, C'_{n,l,i} S_n(R, \rho_{n,i})$$
$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=n}^{l=n} \Theta_{n,l} \sin l\psi \sum_i \cos(m\rho_{n,i} t)\, D'_{n,l,i} S_n(R, \rho_{n,i}).$$

Enfin u est la somme de cette expression et du second membre de

la formule (6). Si u est nul sur les deux sphères ou pour $R = a$ et $R = b$, on aura les équations

$$\frac{C'}{C} = \frac{D'}{D},$$

$$C_{n,l,i} T_n(a, \rho_{n,i}) + C'_{n,l,i} S_n(a, \rho_{n,i}) = 0,$$

$$C_{n,l,i} T_n(b, \rho_{n,i}) + C'_{n,l,i} S_n(b, \rho_{n,i}) = 0,$$

desquelles on pourra déduire les rapports $\frac{C'}{C}$, $\frac{D'}{D}$ et la quantité ρ.

Ainsi nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME — *La solution générale de l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = m^2 \Delta u,$$

dans l'intérieur d'une surface σ, est donnée par la formule

$$u = \int \frac{f(r + mt, \theta, \psi) + F(r - mt, \theta, \psi)}{r} d\sigma,$$

f et F étant des fonctions arbitraires de trois variables et θ, ψ étant deux coordonnées qui servent à déterminer un point de la surface σ.

Sur l'équation $\frac{du}{dt} = m^2 \Delta u$.

35. Imaginons un corps dont la surface σ soit maintenue à une température donnée, et désignons par U la température d'équilibre vers laquelle tend le corps d'après la température de la surface. La température V du corps satisfait à l'équation

$$\frac{dV}{dt} = m^2 \Delta V. \tag{1}$$

Désignons par (α, β, γ) un point de la surface σ; la condition à la

surface pourra s'écrire

$$V_\sigma = \chi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Enfin, si l'on se donne l'état initial du corps, on aura dans l'intérieur de σ

$$(V)_{t=0} = f(x, y, z);$$

de plus, pour $t = \infty$, V doit se réduire à U.

Quant à U, il satisfait aux équations

$$\Delta U = 0, \quad U_\sigma = \chi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour calculer V, on commencera par déterminer U, puis on posera

$$V = U + u;$$

en sorte que u est donné par les équations

$$\frac{du}{dt} = m^2 \Delta u, \quad u_\sigma = 0, \quad (u)_{t=0} = f(x, y, z) - U,$$

et à mesure que t grandit, u tend vers zéro.

Nous avons dit (n° **7**) et nous devons vérifier que la solution générale de l'équation (1) est

$$V = \int \Phi(r, t, \theta, \psi)\, d\sigma$$

avec

$$\Phi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} F(r + 2ms\sqrt{t}, \theta, \psi)\, ds,$$

θ, ψ étant deux coordonnées qui déterminent un point de la surface σ.

Posons

$$F(r, \theta, \psi) = f(r, \theta, \psi) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu(\theta, \psi),$$

et nous aurons

$$\Phi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} f(r + 2ms\sqrt{t}, \theta, \psi)\, ds + \frac{1}{r} \mu(\theta, \psi).$$

V pourra ainsi se décomposer en les deux parties U et u, et l'on fera

$$U = \int \frac{\mu(\theta, \psi)}{r} d\sigma,$$

$$u = \int \varphi(r, t, \theta, \psi) d\sigma$$

avec

$$\varphi(r, t, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} f(r + 2ms\sqrt{t}, \theta, \psi) ds.$$

Nous allons vérifier cette formule, en l'appliquant à la sphère. Adoptons les notations des numéros précédents, et posons

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=n} \Theta_{n,l} \cos l\psi [&A_{n,l,0} \cos(\rho_{n,0} r) + \ldots + A_{n,l,i} \cos(\rho_{n,i} r) + \ldots \\ &+ a_{n,l,0} \sin(\rho_{n,0} r) + \ldots + a_{n,l,i} \sin(\rho_{n,i} r) + \ldots] \\ + \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=n} \Theta_{n,l} \sin l\psi [&B_{n,l,0} \cos(\rho_{n,0} r) + \ldots + B_{n,l,i} \cos(\rho_{n,i} r) + \ldots \\ &+ b_{n,l,0} \sin(\rho_{n,0} r) + \ldots + b_{n,l,i} \sin(\rho_{n,i} r) + \ldots]. \end{aligned}$$

Le terme général de $\varphi(r, t, \theta, \psi)$ est donc

$$\begin{aligned} &A_{n,l,i} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \rho_{n,i} (r + 2ms\sqrt{t}) e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l} \cos l\psi \\ &+ a_{n,l,i} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \rho_{n,i} (r + 2ms\sqrt{t}) e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l} \cos l\psi \\ &+ B_{n,l,i} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \rho_{n,i} (r + 2ms\sqrt{t}) e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l} \sin l\psi \\ &+ b_{n,l,i} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \rho_{n,i} (r + 2ms\sqrt{t}) e^{-s^2} ds . \Theta_{n,l} \sin l\psi. \end{aligned}$$

En désignant par θ', ψ' les coordonnées θ, ψ pour un point de la surface σ, nous aurons, pour le terme général de $\varphi(r, t, \theta', \psi')$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \Theta'_{n,l} (A_{n,l,i} \cos l\psi' + B_{n,l,i} \sin l\psi') \int_{-\infty}^{\infty} \cos \rho_{n,i} (r + 2ms\sqrt{t}) e^{-s^2} ds \\ &+ \frac{1}{r} \Theta'_{n,l} (a_{n,l,i} \cos l\psi' + b_{n,l,i} \sin l\psi') \int_{-\infty}^{\infty} \sin \rho_{n,i} (r + 2ms\sqrt{t}) e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\rho(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds = \cos(\rho r) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\rho ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds$$
$$= \sqrt{\pi} \cos(\rho r)\, e^{-m^2\rho^2 t},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\rho(r + 2ms\sqrt{t})\, e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} \sin(\rho r)\, e^{-m^2\rho^2 t}.$$

Donc le terme général de $\varphi(r, t, \theta', \psi')$ est

$$\Theta'_{n,l}(A_{n,l,i} \cos l\psi' + B_{n,l,i} \sin l\psi') \frac{\cos(\rho r)}{r} \sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t}$$
$$+ \Theta'_{n,l}(a_{n,l,i} \cos l\psi' + b_{n,l,i} \sin l\psi') \frac{\sin(\rho r)}{r} \sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t}.$$

Or on a, en désignant par a le rayon de la sphère,

$$\frac{\cos(\rho r)}{r} = S_0(a, \rho) T_0(R, \rho) + \ldots + S_n(a, \rho) T_n(R, \rho) X_n + \ldots$$
$$\frac{\sin(\rho r)}{r} = T_0(a, \rho) T_0(R, \rho) + \ldots$$
$$+ \frac{\rho^{2n}}{3^2 . 5^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)} T_n(a, \rho) T_n(R, \rho) X_n + \ldots.$$

Multiplions $\varphi(r, t, \theta', \psi')$ par $d\sigma$ et intégrons dans toute l'étendue de la sphère, nous aurons pour le terme général de u

$$\sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t} \int \Theta'_{n,l}(A_{n,l,i} \cos l\psi' + B_{n,l,i} \sin l\psi') X_n d\sigma\, S_n(a, \rho) T_n(R, \rho)$$
$$+ \sqrt{\pi}\, e^{-m^2\rho^2 t} \int \Theta'_{n,l}(a_{n,l,i} \cos l\psi' + b_{n,l,i} \sin l\psi') X_n d\sigma\, T_n(a, \rho) T_n(R, \rho)$$
$$\times \frac{\rho^{2n}}{3^2 . 5^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)}.$$

Or on a, en général,

$$\int \Theta'_{n,l} \cos l\psi' X_n d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \Theta_{n,l} \cos l\psi,$$

et une formule semblable dans laquelle le cosinus est remplacé par un sinus; on en conclut que la seconde partie du terme général équi-

vaut à la première et que ce terme peut s'écrire

$$\Theta_{n,l}(C\cos l\psi + D\sin l\psi)\,T_n(R,\rho)\,e^{-m^2\rho^2 t},$$

C et D étant deux constantes arbitraires.

Donc enfin on a

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\cos l\psi\sum_{i}C_{n,l,i}T_n(R,\rho)\,e^{-m^2\rho^2 t}$$
$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\Theta_{n,l}\sin l\psi\sum_{i}D_{n,l,i}T_n(R,\rho)\,e^{-m^2\rho^2 t},$$

formule dans laquelle ρ est mis pour $\rho_{n,i}$.

Si u est nul sur la sphère de rayon a, ρ est donné par l'équation

$$T_n(a,\rho) = 0,$$

et à chaque valeur de n correspondent une infinité de valeurs de ρ, désignées par $\rho_{n,1}, \rho_{n,2}, \ldots$.

On traiterait de la même manière le cas où la surface σ se composerait de deux sphères concentriques.

Si une sphère rayonne dans un espace dont la température soit constante, on peut supposer que cette température soit zéro, en choisissant l'échelle thermométrique, et la température du corps sera donnée par l'expression précédente de u.

Sur l'équation $\frac{du}{dt} = m^2\Delta u$ pour deux dimensions.

36. L'équation

$$\frac{dV}{dt} = m^2\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2}\right)$$

convient au mouvement de la température dans un cylindre indéfini, dans la supposition que cette température reste la même tout le long d'une droite parallèle à une génératrice.

Supposons donc un cylindre dont la surface soit maintenue à une

température donnée, et désignons par U la température d'équilibre vers laquelle tend le corps d'après la température de la surface. On posera

$$V = U + u;$$

u satisfera à l'équation

$$\frac{du}{dt} = m^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right);$$

il sera nul à la surface, et il tendra vers zéro, quand t grandira indéfiniment.

Prenons pour V l'expression donnée au n° 7

$$V = \int \Phi(r, t, \alpha_1)\, ds$$

avec

$$\Phi(r, t, \alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha_1)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega . e^{-\beta^2} d\beta,$$

$F(r, \alpha_1)$ étant une fonction arbitraire de deux variables et α_1 une coordonnée propre à déterminer un point de la courbe s.

Faisons

$$F(r, \alpha) = f(r, \alpha) + \theta(\alpha),$$

et nous aurons, en posant

$$\varphi(r, t, \alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} f(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha_1)\log(r\sin^2\omega)\, d\omega . e^{-\beta^2} d\beta,$$

l'équation

$$\Phi(r, t, \alpha_1) = \varphi(r, t, \alpha_1) + \pi^{\frac{3}{2}}\theta(\alpha_1)(\log r - 2\log 2).$$

Ainsi V se décompose en les deux parties suivantes, dont la première tend vers zéro, quand t grandit indéfiniment, si la fonction $\theta(\alpha)$ a été convenablement choisie,

$$u = \int \varphi(r, t, \alpha_1)\, ds,$$

$$U = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}\int \log r . \theta(\alpha_1)\, ds - \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{2}\log 2 \int \theta(\alpha_1)\, ds.$$

Le second terme de U est constant; U satisfait à $\Delta U = 0$, et, d'après un théorème démontré dans mon Mémoire sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$ (t. XIV de ce Journal, 1869), on peut écrire plus simplement

$$U = \int \log r . \varsigma(\alpha_1)\, ds,$$

$\varsigma(\alpha_1)$ étant une fonction arbitraire de α.

En l'appliquant au cas où s est un cercle, nous montrerons que la formule qui donne u a dans tous les cas la généralité suffisante.

Mais auparavant remarquons qu'on peut réduire la fonction $F(r, \alpha)$ à être paire en r; car si cette fonction est impaire, $\varphi(r, t, \alpha)$ est nul. En effet, on a

$$\varphi(r, t, \alpha) = \int_0^\infty \int_0^\pi F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, e^{-\beta^2} d\beta$$
$$+ \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, e^{-\beta^2} d\beta,$$

et la seconde intégrale, par des transformations faciles, peut être remplacée par

$$\int_0^\infty \int_0^\pi F(-r\cos\omega - 2m\beta'\sqrt{t}, \alpha) \log(r\sin^2\omega')\, d\omega'\, e^{-\beta'^2} d\beta';$$

donc si $F(r, \alpha)$ est impair en r, on a

$$\varphi(r, t, \alpha) = 0.$$

37. Supposons que la courbe s soit un cercle, et posons

$$\begin{aligned} F(r, \alpha) = {} & A_{0,0}\cos(\lambda_{0,0} r) + A_{0,1}\cos(\lambda_{0,1} r) + A_{0,2}\cos(\lambda_{0,2} r) + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \cos n\alpha_1 [A_{n,0}\cos(\lambda_{n,0} r) + \ldots + A_{n,i}\cos(\lambda_{n,i} r) + \ldots] \\ & + \sin n\alpha_1 [B_{n,0}\cos(\lambda_{n,0} r) + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

fonction paire en r, et nous aurons pour le terme général de

$$\int_0^\pi F(r\cos\omega + 2m\beta\sqrt{t}, \alpha) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega$$

l'expression

$$(A_{n,i}\cos n\alpha_1 + B_{n,i}\sin n\alpha_1)\cos(2m\lambda_{n,i}\beta\sqrt{t})\int_0^\pi \cos(\lambda_{n,i} r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega.$$

On en conclut, pour le terme général de $\varphi(r, t, \alpha_1)$,

$$(A_{n,i}\cos n\alpha_1 + B_{n,i}\sin n\alpha_1)e^{-m^2\lambda^2 t}\sqrt{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega.$$

Or, R étant plus petit que le rayon a du cercle de contour, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)d\omega$$
$$= Q'_0(a,\lambda)Q_0(R,\lambda) - \ldots - \frac{1}{n}Q'_n(a,\lambda)Q_n(R,\lambda)\cos n(\alpha-\alpha_1) - \ldots.$$

Donc le terme général de u est

$$-e^{-m^2\lambda^2 t}\pi^{\frac{3}{2}}\frac{1}{n}Q'_n(a,\lambda)Q_n(R,\lambda)\int_0^{2\pi}(A_{n,i}\cos n\alpha_1 + B_{n,i}\sin n\alpha_1)\cos n(\alpha-\alpha_1)d\alpha_1,$$

ou

$$-\frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{n}Q'_n(a,\lambda)e^{-m^2\lambda^2 t}Q_n(R,\lambda)(A_{n,i}\cos n\alpha + B_{n,i}\sin n\alpha),$$

et l'on peut écrire

$$u = \Sigma Q_n(R,\lambda)(A_{n,i}\cos n\alpha + B_{n,i}\sin n\alpha)e^{-m^2\lambda^2 t},$$

n ayant toutes les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, \infty$, et à chaque valeur de n correspondant une infinité de valeurs de λ.

Si u est nul sur le contour du cercle s, les quantités λ sont données par l'équation

$$Q_n(R,\lambda) = 0.$$

Nous pourrions maintenant appliquer la formule qui vient de nous servir au cas où la courbe s est une ellipse ou au cas où elle se compose soit de deux cercles concentriques, soit de deux ellipses homofocales; mais nous nous en dispenserons, car cette application n'offre plus aucune difficulté après les considérations dans lesquelles nous sommes entré dans les nos **50, 51, 52**.

Des équations aux différences partielles qui se rapportent aux corps cristallisés.

Supposons que l'on ait à considérer une des équations

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \dfrac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \dfrac{d^2u}{dz^2} = -m^2 u, \\ \alpha^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \dfrac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \dfrac{d^2u}{dz^2} = \dfrac{1}{m^2}\dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ \alpha^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \dfrac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \dfrac{d^2u}{dz^2} = \dfrac{1}{m^2}\dfrac{du}{dt}. \end{cases}$$

Posons $x = \alpha x'$, $y = \beta y'$, $z = \gamma z'$, et nous aurons les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx'^2} + \dfrac{d^2u}{dy'^2} + \dfrac{d^2u}{dz'^2} = -m^2 u, \\ \dfrac{d^2u}{dx'^2} + \dfrac{d^2u}{dy'^2} + \dfrac{d^2u}{dz'^2} = \dfrac{1}{m^2}\dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2u}{dx'^2} + \dfrac{d^2u}{dy'^2} + \dfrac{d^2u}{dz'^2} = \dfrac{1}{m^2}\dfrac{du}{dt}. \end{cases}$$

D'après cela, si l'on satisfait à une des équations (2) en posant

$$u = f(r), \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

on satisfera aussi à l'équation (1) correspondante en posant

$$u = f(\rho), \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{\gamma}\right)^2}.$$

On passe donc facilement des intégrales des équations (2) à celles des équations (1). Ainsi, par exemple, on a ce théorème :

Si u représente la température d'un corps cristallisé, ou, plus généralement, si u satisfait à l'équation

$$\alpha^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 \frac{d^2u}{dy^2} + \gamma^2 \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{du}{dt},$$

dans l'intérieur d'une surface σ, cette fonction peut être mise sous la forme

$$u = \int f(\rho, t, \theta, \psi)\, d\sigma, \quad \text{avec} \quad f(\rho, t, \theta, \psi) = \frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} F(\rho + 2s\sqrt{t}, \theta, \psi)\, e^{-s^2} ds,$$

ce qui est un théorème que nous avons donné précédemment dans le cas où α, β, γ se réduisent à l'unité.

FUNÉRAILLES DE M. DUHAMEL.

DISCOURS DE M. JAMIN,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

AU NOM DE LA SECTION DE PHYSIQUE.

Messieurs,

Je viens au nom de la Section de Physique déposer sur la tombe de M. Duhamel les adieux et les regrets de l'Académie des Sciences, regrets dont vous comprendrez la profondeur quand j'aurai raconté quelques circonstances de la vie et des travaux de notre illustre confrère.

Jean-Marie-Constant Duhamel naquit à Saint-Malo vers la fin de l'année 1797. Après de brillantes études au lycée de Rennes, où il eut pour condisciples M. Dubois de Nantes, qui resta son ami, et notre confrère M. Roulin, il fut reçu deux fois à l'École Polytechnique : en 1813, à 16 ans, dans un rang qu'il ne voulut pas accepter, et l'année suivante à la deuxième place. Son avenir paraissait alors fixé; mais les événements politiques amenèrent en 1816 un licenciement général où il fut compris avec des condisciples destinés comme lui à illustrer leur nom par la science : Savary, Lamé, Chasles, Morin, Piobert, Saint-Venant, etc. Contraint de recommencer, le jeune Duhamel revint à Rennes et suivit les cours de l'École de droit; mais il en fut bientôt exclu pour des manifestations politiques. Une heureuse inspiration le ramena à Paris, où il vint chercher fortune

dans l'enseignement. Il commença modestement par un emploi de répétiteur à l'institution Massin. On comprend qu'il n'y demeura pas longtemps; il prit ses grades, puis il fonda une institution, puis il devint directeur des études à Sainte-Barbe.

Cependant, au milieu de ces occupations multipliées et à travers lesquelles il cherchait sa voie, Duhamel trouva le temps d'écrire ses premiers Mémoires et d'établir les bases de sa réputation scientifique. Poinsot l'avait déjà distingué; il retrouvait en Duhamel les qualités qu'il possédait lui-même, l'élégance, la simplicité, la correction. Ampère lui confiait ses idées sur l'électrodynamique et quelquefois le chargeait d'en essayer la rédaction qu'ensuite ils discutaient ensemble. Fourier l'attirait vers la théorie mathématique de la chaleur telle qu'on l'entendait alors; et c'est dans cette direction que Duhamel exécuta ses premiers travaux. Il y débuta par un coup de maître en étudiant la conductibilité dans les cristaux, ce qui le conduisit à des lois qui ont été, longtemps après, vérifiées dans leur ensemble par les belles expériences de Sénarmont.

Mais c'est principalement vers l'acoustique que Duhamel dirigea l'effort de son analyse. Cette science était alors professée avec un éclat incomparable par Savart, qui était un expérimentateur adroit; mais son éducation mathématique avait été négligée, et cette lacune irrémédiable l'empêchait souvent de saisir le lien théorique des phénomènes qu'il excellait à découvrir. Duhamel, qui avait les qualités inverses, partait du calcul pour arriver à l'expérience. C'est ainsi qu'il trouva les lois des tuyaux d'orgue coniques et qu'il expliqua les vibrations des cordes métalliques, en tenant compte de leur rigidité.

La plus célèbre, la plus justement célèbre de ses théories, est celle de l'archet. Il la déduisit des lois connues du frottement; il expliqua tous les faits antérieurement découverts, et il prévit, ce que l'on ne connaissait pas, que la corde doit cesser de vibrer par une action continue et suffisamment prolongée de l'archet et qu'elle peut rendre des sons plus graves que sa note fondamentale. L'expérience montra ensuite que l'analyse avait raison.

La propriété que possèdent les corps sonores de rendre à la fois plusieurs sons avait été inexactement expliquée par Bernoulli. Duhamel étudia la question et donna, en 1840, la solution qu'Helmoltz a géné-

ralisée beaucoup plus tard en se l'attribuant. Il démontra que les diverses parties du corps exécutent des vibrations mixtes, lesquelles peuvent être considérées comme une superposition de plusieurs vibrations simples que l'oreille démêle et perçoit séparément. Il ne suffisait point de l'avoir dit, il fallait encore le prouver, et Duhamel y parvint en fixant sur le corps sonore un style délié qui partage ses vibrations et qui les écrit sur une surface noircie qu'on promène en avant de lui. C'est ainsi que Duhamel inventa le *procédé graphique,* qui était destiné à une si haute fortune et qu'on emploie aujourd'hui pour transcrire tous les mouvements, même ceux du cœur.

Rien ne prouvait mieux que ces beaux travaux le rôle capital que l'instrument mathématique doit jouer dans les sciences expérimentales. Ils ouvrirent à Duhamel les portes de l'Académie des Sciences dans la Section de Physique; ils lui valurent aussi les chaires d'Analyse aux Écoles Polytechnique et Normale et à la Sorbonne. Élève de Duhamel à l'une de ces écoles, il me sera permis, non de juger mon maître, mais de parler de l'influence heureuse qu'il exerça sur l'enseignement et des traces profondes que sa parole a laissées dans nos esprits. Poisson admettait que les fonctions algébriques croissent par *infiniment petits,* et toutes les démonstrations dérivaient de cette conception qui n'était point claire. On en était réduit au conseil de d'Alembert : « Avancez et la foi vous viendra, » ce qui veut dire qu'on peut habituer l'esprit sans le convaincre. Quand Duhamel succéda à Poisson, il substitua aux infiniment petits l'idée de la continuité et la *méthode des limites,* et ce fut comme un soulagement, tant la clarté devint soudaine et vive.

Pour savoir comment Duhamel avait atteint cette lucide rigueur qui fut le trait distinctif de son talent, il faut lire le récit qu'il a fait lui-même de ses méditations : « Je devais commencer par lever pour moi-même toutes les difficultés si cela m'était possible, et ensuite rendre l'exposition assez claire et assez rigoureuse pour que ces difficultés ne se présentassent pas à l'esprit de mes élèves. La carrière de l'enseignement que j'adoptai m'en faisait même une obligation, car je n'aurais jamais pu affirmer des choses qui m'auraient laissé quelques doutes, et il ne m'aurait pas suffi d'avoir la conviction de leur exactitude : il fallait que les élèves l'eussent aussi.

» Telle a été mon étude dans toute ma vie de professeur; telle elle sera quelques années encore, je l'espère. »

Ces années, Dieu les lui a accordées. Il en a profité pour répandre son enseignement dans des livres devenus classiques. La clarté, la méthode, la conscience qui éclataient dans ses leçons, Duhamel les transporta dans ses ouvrages en les accentuant davantage. Le style en est minutieusement travaillé et le raisonnement y est d'une concision qui surprend à chaque pas. Comme l'a dit en un beau langage son élève le plus aimé et le plus illustre, notre confrère M. Bertrand : « Disciple immédiat de Fourier et animé de son esprit, modèle en tout de netteté et d'élégance, Duhamel ne semble vouloir toucher à une question que pour en dire le dernier mot. »

Tel fut, Messieurs, notre confrère Duhamel. Rien ne lui a manque, ni les épreuves de la jeunesse, ni l'édification laborieuse de sa fortune, ni les succès de l'esprit, ni le bonheur domestique, ni l'estime de ses rivaux, ni le respect de ses élèves. Par surcroît, la Providence lui donna le temps de jouir des biens qu'il avait acquis, du bien qu'il avait fait. Quand l'âge vint, il se résigna, de son plein gré, à descendre des chaires qu'il occupait; il le fit avec le profond regret de résigner un devoir qu'il aimait, qu'il avait rempli pendant quarante années avec tant de conscience et avec un si vif éclat. Il atteignit, dans le repos, une vieillesse heureuse et sereine : dans le repos, mais non dans l'oisiveté; car il composa pendant les dernières années de sa vie un ouvrage qu'il avait longtemps projeté, souvent commencé et interrompu, et auquel son penchant et ses fonctions l'avaient toujours ramené, ouvrage intitulé : *Sur les méthodes dans les sciences de raisonnement*. C'est dans ce livre considérable qu'il a consigné le fruit de son expérience et de ses méditations. Il en projetait un autre que lui seul pouvait faire : il voulait retrouver la chaîne aujourd'hui perdue qui, dans l'école de Platon, reliait la logique à la géométrie. Il n'en eut pas le temps. Le 22 avril il assistait, plein de santé, plein de gaieté, à la séance de l'Académie; huit jours après, on nous annonçait sa mort inattendue.

FUNÉRAILLES DE M. E. LAUGIER.

DISCOURS DE M. FAYE,

PRÉSIDENT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

AU NOM DE L'ACADÉMIE.

HONORÉS CONFRÈRES, MESSIEURS,

L'Académie tout entière ressentira vivement la nouvelle perte qu'elle vient de faire. En quelques semaines, deux de ses membres les plus aimés, deux frères, portant tous les deux dignement un nom déjà honoré d'ancienne date dans le monde des sciences, Stanislas et Ernest Laugier viennent de mourir, emportés par la même maladie d'épuisement. A ces coups répétés, ne dirait-on pas qu'il s'agit ici non de la dette ordinaire imposée par la commune loi, mais plutôt d'un arriéré du tribut que Paris a dû payer à cette période cruelle où les deux Laugier ont montré la même constance et le même dévouement ?

Je devrais parler ici au nom de l'Institut, je voudrais tâcher d'adoucir, par ces témoignages, la douleur de notre vénéré doyen, M. Mathieu, et celle de l'illustre famille qui vient de faire une telle perte. Pardonnez-moi si pourtant je m'écarte de cette ligne, et si je mets dans ces dernières paroles quelque chose de personnel : c'est que e ne puis oublier, même en parlant en votre nom, que Laugier était pour moi un camarade; que nous avons débuté ensemble à l'École Polytechnique; que je l'ai retrouvé plus tard à l'Observatoire et suivi usqu'à l'Institut; que partout il m'a tendu la main et soutenu de son suffrage. Au moment si triste où nous nous séparons, après avoir marché

quarante ans dans la même voie, j'éprouve le besoin de dire avant tout que Ernest Laugier a été toute sa vie un modèle de droiture. Dans ces quarante années où je l'ai suivi pas à pas, je ne sais de lui ni un acte douteux, ni une parole mal tenue, ni un sentiment à cacher. Caractère froid en apparence, toujours calme et réservé, mais au fond excellent, sympathique, et surtout infaillible dans l'honneur, n'est-ce pas là, en effet, Messieurs, l'homme que vous avez connu, que vous avez aimé et entouré de votre estime ?

Quant au savant, je n'attendrai pas le solennel hommage qui sera rendu à sa mémoire dans une enceinte plus convenable, il est vrai, pour de pareils éloges ; je ne saurais m'empêcher de vous en parler un moment, même sur cette tombe, car j'ai suivi ses travaux et ses idées plutôt en ami qu'en émule. Le monde savant les connaît aussi ; il a depuis longtemps apprécié cette longue suite de travaux si variés : ces observations astronomiques qui resteront comme des modèles de précision et de conscience ; ces utiles recherches sur les nébuleuses et les étoiles fondamentales ; ces études si fines d'érudition qui lui ont fait découvrir, jusque dans les antiques annales des dynasties chinoises, les premières, les précieuses traces de la fameuse comète de Halley ; et ces mesures si délicates d'optique et de magnétisme pour lesquelles notre illustre maître Arago recourait si volontiers à son habileté consommée.

Voilà quelques-uns des titres qui ont valu à Laugier l'honneur d'être admis parmi vous ; tels sont les traits les plus connus d'une carrière noblement remplie, que hier encore le grand homme d'État qui gouverne la France a voulu couronner par une marque éclatante de son estime, récompense venue, hélas ! à la dernière heure, pas trop tard néanmoins pour nous qu'elle console et pour ses enfants qu'elle encouragera.

Mais, Messieurs, vous n'auriez là qu'une esquisse officielle et au fond incomplète de l'homme éminent qui vient de nous quitter. En dehors des travaux que l'opinion tient pour réussis et qui brillent de l'approbation de tous, j'en sais de lui qui n'ont pas été appréciés à leur valeur, parce que Laugier était un de ces hommes modestes qui doutent trop d'eux-mêmes et ne se complaisent pas aux éclats de la polémique. Je veux parler surtout de son Mémoire sur le Soleil, qu'il

n'a jamais publié en entier, pour avoir un moment hésité devant les préjugés scientifiques de ses contemporains. Mais, moi, je n'hésiterai pas à le dire, ceux qui suivent dans un esprit philosophique les progrès de notre science s'apercevront bientôt qu'il y avait là le premier effort vraiment rationnel et fécond qui eût été tenté depuis Galilée sur ce grand problème. Longtemps on n'y a remarqué que l'habileté ordinaire de l'auteur et le courage avec lequel il avait poursuivi ses observations si redoutables avant les procédés tout récents qui ont fini par les rendre inoffensives, et où chaque jour, en effet, il risquait de se brûler les yeux. Plus tard une appréciation plus exacte s'est produite, mais à l'étranger [*]. D'ailleurs il n'était plus temps pour lui : sa carrière d'observateur venait d'être brisée. D'autres suivirent sa trace ; une branche nouvelle de la science prit naissance sur le terrain qu'il avait entamé, et elle s'est développée rapidement. Il n'en est pas moins vrai que nous en devons les premiers germes au Mémoire inachevé de Laugier, et c'est, en ce moment, une douloureuse satisfaction pour moi de n'avoir pas attendu jusqu'ici pour le proclamer en public.

Ainsi, malgré sa modestie parfaite, en lui l'homme de science était bien à la hauteur de l'homme d'honneur, et ce n'est pas peu dire, Messieurs ! Au nom de nos confrères que cette mort frappe dans une de leurs plus profondes sympathies, je te dis adieu, cher camarade, avec la confiance que tu ne nous as quittés que pour aller là où les esprits généreux et les cœurs d'élite doivent se réunir à jamais, dans la source éternelle de tout bien et de toute vérité.

---

[*] V. Carrington, *Observations of the Spots on the Sun*, p. 4, 5 et 6.

DISCOURS DE M. DELAUNAY,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

AU NOM DU BUREAU DES LONGITUDES.

Messieurs,

Si la mort du confrère qui vient de nous être si prématurément enlevé est une perte cruelle pour l'Académie des Sciences, c'en est une bien plus cruelle encore pour le Bureau des Longitudes, où la personnalité scientifique de Laugier tenait une si grande place. C'est au sein de cette petite Académie astronomique que se montraient à nous dans tout leur jour les belles qualités de notre savant confrère; c'est dans ses séances, que je puis qualifier d'intimes en raison du petit nombre des membres, que Laugier déployait sans gêne et avec cette aimable simplicité que vous connaissiez, les ressources de son profond savoir en tout ce qui touche à l'Astronomie d'observation ; en même temps qu'il nous aidait, par son extrême bon sens et sa grande prudence, à lever les difficultés de diverse nature que nous rencontrions.

En mai 1834, à l'âge de vingt et un ans, Laugier était près d'achever sa seconde année d'études à l'École Polytechnique, lorsqu'il fut appelé par le Bureau des Longitudes à occuper à l'Observatoire de Paris une des places d'élève-astronome qui venaient d'y être créées. Avec un maître tel que Arago, il s'initia rapidement aux méthodes d'observation et ne tarda pas à compter parmi les plus habiles observateurs. Neuf ans plus tard, en juin 1843, il devenait membre adjoint du Bureau des Longitudes en remplacement de Savary, et continuait en cette qualité à prendre une part active aux travaux de l'Observatoire; depuis 1862 il était membre titulaire de ce corps savant. Je ne m'arrêterai pas à vous parler de ce que Laugier a fait à l'Observatoire, tant qu'il lui a été donné de faire usage des instruments d'observation :

les éloquentes paroles que vous venez d'entendre vous ont suffisamment montré toute l'importance des travaux personnels auxquels il s'est livré. Tout présageait que la carrière astronomique de Laugier serait longue et une des mieux remplies que nous présente l'histoire des sciences, lorsque tout à coup, à la mort d'Arago, le Bureau des Longitudes s'est vu privé des moyens d'observation dont il avait disposé jusque-là. Parmi les membres du Bureau, aucun n'a ressenti plus vivement ce coup funeste que le confrère que nous pleurons aujourd'hui. La privation de ces instruments de l'Observatoire, qui étaient devenus pour ainsi dire partie intégrante de son existence, a été pour lui un coup fatal dont les effets ne se sont pas atténués avec le temps. Mais, s'il regrettait de ne plus avoir la possibilité de poursuivre ses travaux de prédilection, il était encore plus profondément affligé du rôle si effacé que l'on avait fait au Bureau des Longitudes, auquel on avait enlevé tout moyen d'action; aussi Laugier avait-il constamment en vue de relever le corps savant auquel il appartenait. C'est dans ce but qu'il a mis en avant et fait adopter par le Bureau des Longitudes le projet d'une vaste entreprise ayant pour objet de déterminer, avec toute la précision que comporte la science, les longitudes d'un certain nombre de lieux convenablement choisis sur toute la surface de notre globe. Ces lieux devaient former comme autant de points de repère destinés à servir de base à la détermination exacte de toutes les longitudes dont la connaissance est nécessaire aux marins et aux voyageurs, longitudes dont le tableau est publié chaque année dans la *Connaissance des temps*. A la demande du Bureau des Longitudes, l'administration de la marine a bien voulu désigner quelques officiers et ingénieurs pour exécuter ce travail. Laugier les a initiés lui-même aux moyens d'observation qu'ils devaient employer pour cela. On sait quel succès a eu cette entreprise, dont les résultats, vérifiés, contrôlés et approuvés par le Bureau des Longitudes, sont déjà en grande partie publiés.

La publication de la *Connaissance des temps* était la seule part de travail laissée à l'activité du Bureau des Longitudes. On sait avec quel courage et quelle énergique persévérance le vénérable doyen du Bureau et de l'Académie des Sciences, M. Mathieu, a dirigé et soutenu cette publication au milieu des difficultés de toutes sortes, et surtout de la

pénurie des ressources pécuniaires nécessaires aux améliorations que le progrès de la science exigeait. Laugier a pris dès 1861 une part importante dans ce travail. Toute la portion dont les calculs de détail ne pouvaient pas être confiés à de simples calculateurs était faite par lui : tels sont les calculs des marées, ceux des éclipses et ceux des occultations des étoiles par la Lune. Il avait en outre accru l'importance de la *Connaissance des temps*, en joignant aux résultats du calcul des éclipses des cartes qui faisaient connaître les circonstances générales des principales éclipses de Soleil sur la surface du globe terrestre.

En mars 1870, une Commission fut chargée par le Ministre de l'Instruction publique d'étudier les mesures à adopter pour réorganiser l'Observatoire de Paris. Laugier, qui faisait partie de cette Commission, en profita pour demander qu'on rendît au Bureau des Longitudes le rôle qu'on n'aurait jamais dû lui enlever. La réclamation était si bien fondée qu'elle fut immédiatement accueillie, et la Commission n'hésita pas à arrêter en principe que le Bureau des Longitudes devait être constitué en conseil supérieur des établissements astronomiques de France. Les événements si graves que nous avons eu à traverser depuis cette époque ont retardé pendant longtemps la mise à exécution des mesures dont la Commission recommandait l'adoption au Gouvernement. Toutefois notre confrère a eu la satisfaction de voir ses désirs réalisés par le décret rendu le 5 du mois de mars dernier. D'après ce décret, le Bureau des Longitudes doit désormais jouer un rôle prépondérant dans les inspections annuelles de nos observatoires, et aussi dans les nominations du personnel de ces établissements. Nous comptions beaucoup sur Laugier pour nous aider de son expérience et de ses connaissances dans l'accomplissement de cette tâche importante du Bureau; mais la mort avait déjà marqué sa victime, et elle n'a pas voulu permettre que Laugier joignît à la satisfaction d'avoir vu adopter ses idées celle de prendre part lui-même aux délibérations résultant des nouvelles attributions du Bureau des Longitudes. La mort laisse parmi nous un vide immense dont nous nous ressentirons longtemps.

Les chagrins de famille n'ont pas été épargnés à notre malheureux confrère. Il y a quelques années, il perdait un fils rempli des plus brillantes qualités, l'espoir de ses parents et de leurs amis. Tout ré-

cemment, c'était le tour de son frère, qu'il avait été si heureux de voir venir prendre place près de lui à l'Académie des Sciences, et pour lequel il avait une affection qui, en raison de la différence d'âge, touchait à la tendresse filiale. Ces deux pertes l'ont fortement impressionné et ont certainement beaucoup contribué à ébranler sa santé et à abréger ses jours. Ainsi, en moins de deux mois, l'Académie des Sciences perd deux de ses membres les plus estimés et les plus aimés, frères par le sang, mais frères aussi par l'honorabilité et la droiture du caractère, par la douceur et l'aménité dans les rapports. Ces deux frères, qui resteront unis dans nos regrets, laissent chacun deux fils ; puissent-ils prendre tous pour modèles les pères qu'ils viennent de perdre : nous ne pouvons rien leur souhaiter de plus.

Qu'il me soit permis en terminant de dire combien je suis personnellement frappé. Laugier était pour moi un ami véritable. Depuis plus de dix-huit ans, nous vivions dans la plus grande intimité : habitant sous le même toit, nous occupant des mêmes choses, nous nous voyions à chaque instant. Nos vies étaient continuellement mêlées, presque confondues. C'est dans ces rapports de tous les jours que j'ai pu apprécier tout ce qu'il y avait de bon, d'honnête dans cette âme si droite, tout ce qu'il y avait de rectitude dans son jugement. Je me sentais entraîné à le consulter dans toute circonstance. Jamais ses bons conseils ne m'ont fait défaut ; jamais je n'ai eu à regretter de les avoir suivis. Laugier cessera d'exister au milieu de nous, mais il ne cessera pas d'être vivant dans mes plus intimes souvenirs.

DISCOURS DE M. JURIEN DE LA GRAVIÈRE,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

AU NOM DE LA MARINE.

MESSIEURS,

J'ai été étourdi, comme vous, par le double coup de foudre qui a frappé dans l'espace de deux mois une famille si unie, si respectable par son union et par ses vertus domestiques. Il y a quelques jours, j'étais assis à côté de M. Laugier; nous cherchions ensemble quels perfectionnements pourrait recevoir l'instruction des élèves de l'École navale, car nous faisions tous les deux partie de la Commission instituée à cet effet par le Ministre. J'avais donc plus qu'un autre le devoir d'apporter ici le tribut de reconnaissance et de regrets du corps auquel j'appartiens. Toute cette génération de marins dont vous avez admiré le dévouement, M. Laugier, l'éminent examinateur, l'a vue passer sous ses yeux, comparaître à son tribunal. Il avait pour elle la sollicitude d'un père de famille, sollicitude ferme et austère, telle que celle qui convient à un homme chargé d'assurer de bons serviteurs à l'État. M. Laugier ne songeait pas seulement à la marine quand il surveillait de si près le développement des études à l'École navale : il se préoccupait aussi des intérêts de la Science. Il voulait que, dans cette jeunesse ardente répandue sur toute la surface du globe, les poursuites scientifiques trouvassent leurs meilleurs auxiliaires. Aussi, quand il s'est agi d'affermir les jalons sur lesquels s'appuient les déterminations géographiques, quand il a fallu fixer par des observations d'une précision absolue un certain nombre de méridiens fondamentaux, M. Laugier a-t-il été doublement heureux de pouvoir offrir au Bureau des Longitudes la collaboration de quelques-uns de ces jeunes marins dont il avait favorisé les aptitudes et encouragé les premiers efforts.

Aucune des jouissances attachées aux honorables et rigoureuses fonctions qu'il exerçait avec tant de confiance et de droiture ne lui a donc manqué. Heureux, Messieurs, ceux qui, dans ces temps troublés, n'ont jamais quitté les régions sereines de la science, qui, comme l'ami dont le deuil nous rassemble, n'ont eu d'autre souci que d'élever leur famille dans l'amour du travail, dans la pratique du bien, qui ont ainsi fait du foyer domestique un asile de paix et de recueillement! Ceux-là, quand ils arrivent au terme du grand voyage, croient facilement à une autre vie, car ils ont tout intérêt à y croire : ils sont certains d'y trouver, avec l'éternel repos, la juste récompense de leurs vertus.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville

PAR M. MAXIMILIEN MARIE.

De nouvelles recherches que je viens d'entreprendre relativement à la *Théorie des fonctions de variables imaginaires* ont incidemment ramené mon attention sur les questions que j'ai traitées dans le *Journal de Mathématiques*, de 1858 à 1862, et m'ont suggéré diverses remarques qui me paraissent assez intéressantes pour mériter d'être communiquées à vos lecteurs.

Il s'agit de l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire de la suite des points d'un lieu plan pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est réel. Cette ligne ne saurait trop attirer l'attention, puisqu'elle complète sous une infinité de rapports la courbe réelle, dont elle est la véritable supplémentaire, qu'elle joue le même rôle dans une infinité de questions et qu'elle la remplace totalement, dans ses relations avec les conjuguées, lorsque les coefficients de l'équation deviennent imaginaires.

L'enveloppe imaginaire des conjuguées est le lieu des points de contact des tangentes au lieu complet, dont les coefficients angulaires sont réels. C'est en quelque sorte sa définition, mais je ne l'avais pas présentée dans ces termes qui en font ressortir immédiatement plusieurs propriétés importantes.

Il résulte d'abord de cette manière de concevoir l'enveloppe imaginaire que les $m(m-1)$ tangentes, qu'on peut mener à une courbe de degré m parallèlement à une direction réelle donnée, sont les tangentes qu'on peut mener parallèlement à cette direction au système des deux enveloppes, de sorte que les deux courbes se complètent l'une l'autre sous ce rapport; il en résulte aussi que les asymptotes de l'enveloppe imaginaire sont les asymptotes du lieu complet dont les coefficients

angulaires sont réels et les ordonnées à l'origine imaginaires; on en conclut encore que l'enveloppe imaginaire touche l'enveloppe réelle en ses points d'inflexion, puisque les tangentes aux points d'inflexion représentent des couples de tangentes réelles, confondues, qui vont devenir imaginaires si leur coefficient angulaire varie infiniment peu dans un sens convenable; mais on en déduit cette proposition bien plus importante que *lorsque les deux enveloppes coexistent, elles sont toujours réciproques l'une de l'autre*, c'est-à-dire que si, ayant déterminé l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu, on considère le lieu dont l'équation représenterait cette enveloppe imaginaire en coordonnées réelles, on retrouvera la première courbe pour enveloppe imaginaire des conjuguées du second lieu.

En effet, soit

$$y = ax + \varphi(a)$$

l'équation générale des tangentes à une courbe $f(x, y) = 0$, de degré m, de sorte que $\varphi(a)$ aura $m(m-1)$ valeurs : si l'enveloppe imaginaire existe, $\varphi(a)$ pourra devenir imaginaire pour certaines valeurs de a. Soient

$$\varphi_1(a) \pm \sqrt{\varphi_2(a)}$$

deux formes de $\varphi(a)$ qui deviennent imaginaires en même temps; l'équation

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{\varphi_2(a)}$$

représentera deux tangentes à l'enveloppe réelle, lorsque $\varphi_2(a)$ sera positif, et deux tangentes à l'enveloppe imaginaire dans le cas contraire; mais si $\varphi_2(a)$ est négatif, les deux tangentes à l'enveloppe imaginaire seront représentées en coordonnées réelles par

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{-\varphi_2(a)};$$

les deux courbes sont donc l'une l'enveloppe des droites

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{\varphi_2(a)},$$

et l'autre celle des droites

$$y = ax + \varphi_1(a) \pm \sqrt{-\varphi_2(a)};$$

par conséquent, elles sont réciproques l'une de l'autre.

La proposition suivante est énoncée dans le Mémoire adressé par moi à l'Académie des Sciences, en 1865, où je détermine celui des points critiques d'une fonction y qui limite la convergence du développement de cette fonction, Mémoire qui est resté jusqu'ici inédit, le Rapport n'ayant pas encore été présenté. Voici cette proposition :

Lorsque les coefficients, d'abord réels, d'une équation $f(x, y) = 0$ reçoivent des accroissements infiniment petits imaginaires, la courbe réelle que représentait d'abord l'équation se transforme instantanément en enveloppe imaginaire, sans changer de forme qu'infiniment peu. En d'autres termes, l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu dont l'équation a ses coefficients imaginaires est substituée à la courbe réelle que représentait l'équation à coefficients réels de même forme, et est en continuité géométrique avec cette courbe réelle. En effet, si l'on donne à x, dans la nouvelle équation, les valeurs des abscisses des points de l'ancienne courbe réelle, d'une part, les valeurs correspondantes de y différeront infiniment peu des ordonnées de l'ancienne courbe réelle, et, de l'autre, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ aux points correspondants, qui étaient tout à l'heure réelles, auront maintenant leurs parties imaginaires infiniment petites; ces points seront donc à la fois infiniment voisins de l'ancienne courbe réelle et de la nouvelle enveloppe.

J'ai démontré dans le tome VI, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, 1861, que si $r + r'\sqrt{-1}$ est la valeur de

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

en un point de l'enveloppe, $r + r'$ est le rayon de courbure de l'enveloppe en ce point : il ne restait donc rien à faire sur la théorie de la

courbure de l'enveloppe imaginaire; cependant voici une relation remarquable entre les développées des deux enveloppes. On possède si peu de théorèmes généraux sur la théorie des courbes que je ne crois pas devoir passer celui-ci sous silence : *La développée de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'une courbe est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la développée de cette courbe*, et réciproquement, puisque les deux enveloppes sont réciproques. En effet, le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe imaginaire en un quelconque de ses points étant réel, celui de la normale l'est aussi; d'ailleurs x et y désignant les coordonnées d'un point de l'enveloppe, chacune des équations

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

et

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x)$$

représente une seule droite, la première réellement tangente à l'enveloppe imaginaire et la seconde effectivement normale, de sorte que la développée de l'enveloppe imaginaire est l'enveloppe de la droite unique représentée par l'équation

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x);$$

mais, d'un autre côté, la développée de la courbe réelle étant l'enveloppe de la droite représentée par l'équation

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x),$$

lorsque x et y sont réels, il en résulte que, quel que soit le point du lieu dont x et y soient les coordonnées, le faisceau

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x)$$

est toujours tangent au lieu représenté par l'équation de la développée; et enfin si le point $[x, y]$ appartient à l'enveloppe imaginaire, $\frac{dy}{dx}$ étant réel, la droite

$$Y - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(X - x)$$

est effectivement tangente à l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la courbe qu'elle enveloppe, lorsqu'elle est réelle, c'est-à-dire de la développée de la courbe réelle proposée.

On vérifiera aisément cette proposition sur l'hyperbole.

J'ai fait voir, dans le tome IV, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, 1859, que la rectification de l'enveloppe imaginaire est fournie par la même intégrale qui donne celle de la courbe réelle, et, à ce propos, après avoir démontré que la période imaginaire de l'intégrale rectificatrice de l'hyperbole est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence totale entre la somme des longueurs des deux branches de l'hyperbole supplémentaire et la somme des longueurs des deux asymptotes communes, j'ai été amené, pour interpréter semblablement la période réelle, à constater que la rectificatrice de l'une des deux hyperboles a pour périodes les produits par $\sqrt{-1}$ de celles de l'autre. Le fait est général : *l'intégrale rectificatrice de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'une courbe a toujours pour périodes les produits par* $\sqrt{-1}$ *des périodes de l'intégrale rectificatrice de la courbe réelle*, et réciproquement, puisque les deux enveloppes sont réciproques. En effet, il est clair, d'une part, que l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

a pour périodes réelles les longueurs des anneaux fermés de la courbe réelle.

D'un autre côté, si l'enveloppe imaginaire présente un anneau fermé composé de points imaginaires conjugués deux à deux, les tangentes à cet anneau en deux points imaginaires conjugués seront pa-

rallèles, car les coefficients différentiels

$$\frac{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha' - d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha - d\beta\sqrt{-1}}$$

en ces deux points ne différeront pas l'un de l'autre, en raison de l'hypothèse

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{d\beta'}{d\beta}$$

qu'entraîne celle de leur réalité; les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ aux deux points considérés de l'anneau seront donc égales, et quant à celles de dx, elles seront telles que $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$ et $d\alpha - d\beta\sqrt{-1}$. D'un autre côté, si l'on fait parcourir l'anneau entier au point mobile, les deux éléments conjugués seront parcourus en sens contraires; par conséquent, la somme des éléments de l'intégrale, correspondant à ces deux éléments de l'anneau, sera

$$2\,d\beta\sqrt{-1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

elle sera imaginaire, sans partie réelle, et représentera le produit par $\sqrt{-1}$ de la somme des deux éléments réalisés de l'anneau. Les produits par $\sqrt{-1}$ des longueurs des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire sont donc les périodes imaginaires de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

D'ailleurs, les deux enveloppes étant réciproques, il est clair que, si l'on forme les deux intégrales qui les rectifieraient réelles, chacune de ces deux intégrales aura pour périodes celles de l'autre multipliées par $\sqrt{-1}$. Cette proposition, au reste, dérive immédiatement de ce théorème plus général que les quadratrices de deux courbes conjuguées l'une de l'autre ont chacune pour périodes les produits par $\sqrt{-1}$ de celles de l'autre. En effet, si l'on désigne par z la fonction de x

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

relative à un lieu $f(x, y) = 0$, la quadratrice de la courbe dont l'ordonnée serait z sera la rectificatrice de celle dont l'ordonnée est y. Or, suivant que le point $[x, y]$ appartiendra à l'enveloppe réelle ou à l'enveloppe imaginaire du lieu $f(x, y) = 0$, z et x seront tous deux réels, ou bien z sera réel et x imaginaire; par conséquent, le lieu des points $[z, x]$, correspondant à l'enveloppe imaginaire du lieu $f(x, y) = 0$, ne sera autre chose que la conjuguée à z réels du lieu des points $[z, x]$ correspondant à l'enveloppe réelle.

J'ai, dans le même tome IV, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, décomposé l'intégrale $\int y\,dx$ prise entre des limites imaginaires $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ en trois parties qui, en désignant par $[x'_0, y'_0]$ et $[x'_1, y'_1]$ les points de contact avec l'enveloppe totale des deux conjuguées menées par les points $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, sont représentées par

$$\int_{x_0, y_0}^{x'_0, y'_0} y\,dx, \quad \int_{x'_0, y'_0}^{x'_1, y'_1} y\,dx, \quad \text{et} \quad \int_{x'_1, y'_1}^{x_1, y_1} y\,dx.$$

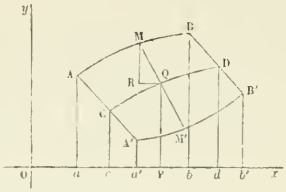
La première et la troisième intégrale représentent, à des parties algébriques près, les aires correspondant aux arcs des deux conjuguées compris entre les limites de ces intégrales, et lorsque ces conjuguées touchent la courbe réelle, l'intégrale intermédiaire représente à plus forte raison une aire connue.

Mais, si les deux conjuguées menées par les limites ne touchaient pas la courbe réelle, l'intégrale intermédiaire se rapportait à l'enveloppe imaginaire, et je ne savais ni l'évaluer ni l'interpréter, en sorte qu'il y avait là une lacune fâcheuse. Cette lacune est aujourd'hui comblée, et l'on pourrait maintenant évaluer avec une approximation indéfinie, par les formules de quadrature approchée, toute intégrale $\int y\,dx$ portant sur une fonction y définie par une équation algébrique quelconque et prise entre des limites quelconques.

La formule que je vais établir s'appliquant à un parcours quelconque, il ne sera pas nécessaire de supposer qu'il s'agisse de l'enveloppe imaginaire, mais il est tout simple qu'elle ne présentera d'intérêt véritable que par rapport à cette enveloppe, courbe algébrique bien définie, qu'on aura toujours dû discuter avec soin et dont on aura l'équa-

tion en coordonnées réelles, équation toujours plus ou moins semblable à celle de la courbe réelle.

Soient AB un arc d'une courbe quelconque formée des points correspondant à une suite continue, mais arbitraire, de solutions de l'équation du lieu, et A′B′ l'arc dont les points correspondraient aux valeurs de x et de y conjuguées de celles qui donnent les points de AB.



L'arc A′B′ fera ou non partie du lieu selon que l'équation de ce lieu aura ses coefficients réels ou en aura d'imaginaires. Dans le second cas, cet arc A′B′ appartiendrait au lieu représenté par l'équation conjuguée de la proposée; mais cette remarque n'a pas d'importance dans la question, car si l'on a pu construire par points l'arc AB, on saura par là même construire l'arc A′B′. En effet, si $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ sont les coordonnées d'un point M de AB, pour obtenir ce point on aura dû former le contour OPQRM dont les côtés représenteraient respectivement en grandeur et en signe α, α', β et β'. Or le point M′ conjugué de M s'obtiendra en prolongeant simplement MQ d'une longueur égale à elle-même.

Enfin, soit CD le lieu des milieux des cordes réelles joignant deux à deux les points correspondants de AB et de A′B′.

L'intégrale $\int y\,dx$ prise le long de l'arc AB est

$$\Sigma(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$\Sigma(\alpha' d\alpha - \beta' d\beta) + \sqrt{-1}\,\Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha).$$

Mais les aires ABba et A′B′$b'a'$ ont respectivement pour mesures

$$\Sigma(\alpha' + \beta')(d\alpha + d\beta)$$

ou

$$\Sigma(\alpha' d\alpha + \beta' d\beta) + \Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha),$$

et

$$\Sigma(\alpha' - \beta')(d\alpha - d\beta)$$

ou

$$\Sigma(\alpha' d\alpha + \beta' d\beta) - \Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha).$$

Il en résulte

$$\Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba - \mathrm{A'B'}b'a')$$

et

$$\Sigma(\alpha' d\alpha + \beta' d\beta) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba + \mathrm{A'B'}b'a').$$

Cette dernière équation donne

$$\Sigma(\alpha' d\alpha - \beta' d\beta) = 2\Sigma\alpha' d\alpha - \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba + \mathrm{A'B'}b'a').$$

D'ailleurs α' et α étant les coordonnées d'un point quelconque de CD,

$$\Sigma\alpha' d\alpha = \mathrm{CD}dc;$$

par conséquent

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} y\,dx = 2\mathrm{CD}dc - \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba + \mathrm{A'B'}b'a') + \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba - \mathrm{A'B'}b'a')\sqrt{-1}.$$

La même formule appliquée à l'arc A′B′ donnerait

$$\int_{\mathrm{A'}}^{\mathrm{B'}} y\,dx = 2\mathrm{CD}dc - \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba + \mathrm{A'B'}b'a') - \tfrac{1}{2}(\mathrm{AB}ba - \mathrm{A'B'}b'a')\sqrt{-1}.$$

Si les deux arcs AB et A′B′ se rejoignaient aux deux extrémités, sur la courbe réelle, car deux points imaginaires conjugués restent toujours à distance finie tant que les parties imaginaires de leurs coordonnées ne s'évanouissent pas simultanément, l'ensemble de ces deux arcs formerait un contour fermé, et si le point $[xy]$ parcourait ce contour, la somme des éléments de l'intégrale $\int y\,dx$ s'obtiendrait par

la soustraction des formules précédentes, parce que l'un des arcs serait parcouru en sens contraire de celui qui a été supposé dans les formules précédentes.

L'intégrale se réduirait donc à

$$(\mathrm{AB}ba - \mathrm{A'B'}b'a')\sqrt{-1},$$

c'est-à-dire à l'aire enveloppée par le contour.

Il en résulte que l'aire enveloppée par un contour composé de points imaginaires conjugués est constante et égale à celle d'un anneau de conjuguée compris entre les mêmes branches de la courbe réelle.

Cette proposition ne présente aucun intérêt géométrique comparable à celui qui s'y attache lorsqu'il s'agit des conjuguées, courbes algébriques bien définies et liées déjà par tant de rapports à la courbe réelle, mais elle a une certaine importance au point de vue analytique.

La formule qui précède n'a d'importance que parce qu'elle fournit le moyen d'exprimer simplement la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long de l'enveloppe imaginaire des conjuguées. Un exemple très-simple suffira pour indiquer l'usage qu'on en pourra faire.

Supposons qu'il s'agisse du lieu

$$x^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2.$$

L'enveloppe est, comme je l'ai montré dans le tome VI, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, le cercle

$$x^2 + y^2 = (r + r')^2 :$$

c'est la courbe AB.

L'enveloppe conjuguée est

$$x^2 + y^2 = (r - r')^2 :$$

c'est A'B'.

Quant au lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués de l'une et de l'autre enveloppe, c'est le cercle

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

L'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$x^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

est donc, pour un tour entier,

$$2\pi r^2 - \tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2 + (r-r')^2] + \tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2 - (r-r')^2]\sqrt{-1}.$$

ou

$$\pi(r + r'\sqrt{-1})^2;$$

ce à quoi l'on devait s'attendre et que j'avais annoncé dans le tome IV, 2e série, du *Journal de Mathématiques*, comme une chose qui devait être, parce que la période de l'intégrale $\int y\,dx$ relative au lieu

$$x^2 + y^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

devait évidemment être $\pi(r + r'\sqrt{-1})^2$; mais je n'aurais pas pu alors en donner une démonstration directe.

FUNÉRAILLES DE M. DELAUNAY.

On lit dans le *Bulletin astronomique de l'Observatoire de Paris*, sous la date du 8 août 1872 :

« Un grand malheur vient de frapper l'Observatoire. M. Delaunay, notre cher et vénéré Directeur, a trouvé la mort dans une excursion sur les côtes de Normandie. Le canot dans lequel se trouvaient M. Delaunay, M. Millot, son cousin, et deux matelots a chaviré en rade de Cherbourg, et les quatre voyageurs ont péri. Seul le corps de l'éminent savant a été retrouvé à l'île de Pélée.

» Ce terrible événement, qui prive l'Astronomie d'un de ses plus illustres représentants, affectera péniblement tous les amis de la Science, et pour ceux qui, comme nous, ont pu apprécier les grandes qualités de cœur et le rare mérite de notre malheureux Directeur, une telle perte demeurera irréparable. »

DISCOURS DE M. FAYE,

PRÉSIDENT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

AU NOM DE L'ACADÉMIE [*].

Honorés Confrères, Messieurs,

Quelle mort cruelle que celle de notre confrère! Frappé dans toute sa force, au beau milieu d'une existence couronnée des plus brillants

[*] Le corps de M. Delaunay ayant été transporté à Ramerupt, ce discours n'a pas été prononcé.

succès, entouré de l'estime générale, admiré pour les plus beaux, les plus énergiques labeurs que puisse concevoir et mener à bonne fin la science de notre époque; regretté de tous, car tous rendaient hommage depuis longtemps à ses fortes qualités : tel est l'homme qui vient de nous être enlevé subitement, à la fleur de son génie, par une mort obscure et sans but, après avoir vaillamment supporté le siége de Paris et les terreurs de la guerre civile. Il y aurait, dans cette brusque exécution des décrets mystérieux d'une apparente fatalité, de quoi confondre nos esprits, si nous ne savions qu'il faut être prêt à toute heure. Noublions pas, Messieurs, que nous sommes, grands et petits, dans une main suprême qui nous départit la vie et l'intelligence en vue du bien et du progrès, et qui soudainement peut clore à son gré la page où nous inscrivons les actes de notre vie; heureux si, comme Delaunay, nous avons bien usé du temps qui nous est laissé, si, comme lui, nous avons augmenté la science et fait avancer l'esprit humain vers la vérité divine!

Car jamais existence n'a été mieux employée que celle de notre confrère. Sa vie, hélas! trop courte, a été consacrée aux plus rudes travaux dont l'honneur puisse rejaillir sur notre pays. Des gens qui ne songent qu'aux infortunes d'un jour parlent de la puissance scientifique qui aurait déserté cette terre pour aller féconder des races nouvelles : qu'ils nous montrent donc ailleurs un esprit plus solide, qui se soit attaqué à de plus grands problèmes et les ait aussi vigoureusement traités et résolus! La *Théorie de la Lune,* de Delaunay, est l'œuvre d'une virilité scientifique élevée à la plus haute puissance de ce siècle. L'Académie, héritière de cette œuvre, que Delaunay a entreprise pour elle et publiée sous son patronage, de ce travail énorme que les plus compétents jugeaient impossible avant lui et où nous admirons à la fois la simplicité dans la méthode et la puissance dans l'application, l'Académie, dis-je, ne la laissera pas inachevée.

Je voulais d'abord vous retracer les appréciations qui ont accueilli à l'étranger cette œuvre colossale; mais à quoi bon chercher à tromper votre douleur? Devant ce coup inattendu, devant ce désastre public, je ne me sens pas la force de le faire. Les savants interprètes du Bureau des Longitudes, de l'Observatoire et du Corps des mines vous parleront mieux que moi de cette vie si bien remplie. D'ailleurs, cher confrère,

l'Institut ne se tient pas quitte pour si peu envers vous : dans une séance solennelle, consacrée à votre mémoire, l'Académie des Sciences vous rendra un complet et solennel hommage. La France sait déjà, mais elle connaîtra mieux alors l'œuvre grandiose que vous avez élevée en l'honneur de la science et de votre pays. En ce moment, tout entier à mon profond regret, je ne puis que partager la douleur de vos camarades et de vos élèves; je m'arrête devant ces larmes que je vois aux yeux de vos maîtres et de vos anciens. Adieu donc, cher confrère! nous garderons tous le souvenir de votre grand esprit, si noblement uni à tant de loyauté et d'amour du bien. Adieu, et puissions-nous marcher jusqu'au bout sur vos traces!

RECHERCHES SUR LES SUBSTITUTIONS;

PAR M. CAMILLE JORDAN,
Ingénieur des Mines, à Paris.

On sait qu'il existe un groupe de 6 lettres trois fois transitif et d'ordre $6.5.4$.

M. Émile Mathieu, généralisant ce résultat, a montré que, si m est un nombre quelconque, premier ou puissance d'un nombre premier, il existera au moins un groupe trois fois transitif de degré $m+1$ et d'ordre $(m+1)m(m-1)$. Il a signalé également l'existence d'un groupe de 12 lettres, 5 fois transitif et d'ordre $12.11.10.9.8$.

Ces résultats donnent quelque intérêt à la question suivante :

Déterminer à quelles conditions doivent satisfaire les deux entiers m et k pour qu'il existe des groupes $k+2$ fois transitifs, de degré $m+k$ et d'ordre $(m+k)(m+k-1)\ldots m(m-1)$.

Nous établirons dans ce Mémoire les deux propositions que voici :

1° *Le nombre m doit être premier ou puissance d'un nombre premier;*

2° *Le nombre k ne peut surpasser l'unité.*

Les seuls groupes qui fassent exception à cette dernière règle sont les groupes symétriques ou alternés et les groupes de 11 et 12 lettres de M. Mathieu. Ce dernier groupe n'est donc pas, comme le groupe trois fois transitif de 6 lettres, le premier anneau d'une série. Il reste unique de son espèce.

Nous déduirons encore de cette recherche le théorème suivant :

Soit p un nombre premier > 3. Il existera trois groupes primitifs de la classe p [*] si $p+1$ est une puissance de 2, un seul dans le cas contraire.

[*] Nous disons qu'un groupe est de la classe p lorsque celle de ses substitutions qui déplace le moins de lettres en déplace p.

§ I. — *Théorèmes généraux.*

1. Théorème I. — *Un groupe transitif* G *entre m lettres* $a, b, c, \ldots$ *contient nécessairement des substitutions qui déplacent toutes les lettres.*

Soient respectivement $H_a, H_b, H_c, \ldots$ les groupes formés par celles des substitutions de G qui ne déplacent pas les lettres $a, b, c, \ldots$. Ces groupes seront transformés les uns dans les autres par les substitutions de G. Soit, en effet, S une de ces substitutions, qui fasse succéder, par exemple, b à c. Le groupe transformé de H_c par S sera contenu dans G, et comme ses substitutions ne déplacent pas b, il sera contenu dans H_b. Donc H_b contiendra au moins autant de substitutions que H_c. Mais, réciproquement, le groupe transformé de H_b par S^{-1} sera contenu dans H_c. Donc H_c ne peut contenir moins de substitutions que H_b. Donc H_c et H_b contiennent le même nombre de substitutions, et H_b sera le transformé de H_c par S.

D'ailleurs G, étant transitif, contient une substitution au moins qui remplace a par l'une quelconque b des autres lettres $b, c, \ldots$. Cette substitution transformera, comme on vient de le voir, H_a en H_b. Donc tous les groupes $H_a, H_b, H_c, \ldots$ seront les transformés de l'un quelconque d'entre eux, H_a, par les diverses substitutions de G.

Cela posé, désignons par N_x le nombre de celles des substitutions de H_a qui déplacent précisément x lettres. On aura, en désignant par N le nombre total des substitutions de ce groupe, (H_a)

$$N = N_{m-1} + N_{m-2} + \ldots + N_x + \ldots + N_0.$$

On peut remarquer d'ailleurs que l'on aura $N_0 = 1$, car H_a contient une seule substitution qui ne déplace aucune lettre (à savoir l'unité) et $N_1 = 0$, aucune substitution ne pouvant déplacer qu'une seule lettre.

Chacun des m groupes $H_a, H_b, H_c, \ldots$ transformés de H_a contiendra évidemment N substitutions, parmi lesquelles N_x ne déplaçant que x lettres. Ces groupes contiendraient donc ensemble mN_x substitu-

tions déplaçant x lettres; mais ces substitutions ne sont pas toutes distinctes.

Soit, en effet, T l'une d'elles; elle laissera immobiles $m - x$ lettres, telles que $a, b, \ldots$; donc elle appartiendra aux $m - x$ groupes H_a, $H_b, \ldots$. Donc le nombre des substitutions distinctes contenues dans les groupes H_a, H_b, $H_c, \ldots$ et déplaçant x lettres sera $\frac{m}{m-x} N_x$, et le nombre total des substitutions distinctes contenues dans ces groupes sera

$$X = m N_{m-1} + \frac{m}{2} N_{m-2} + \ldots + \frac{m}{m-x} N_x + \ldots + \frac{m}{m} N_0.$$

Cela posé, le groupe G contient mN substitutions (*Voir* notre *Traité des substitutions*, n° 44). Celles de ces substitutions qui déplacent moins de m lettres appartiendront évidemment à l'un des groupes H_a, H_b, $H_c, \ldots$ et seront en nombre X. Il restera donc

$$Y = mN - X = m\left(\frac{1}{2} N_{m-2} + \ldots + \frac{m-x-1}{m-x} N_x + \ldots + \frac{m-1}{m} N_0\right),$$

substitutions déplaçant toutes les lettres.

Le nombre N_0 étant égal à l'unité, Y ne pourra s'annuler, et l'on obtiendra sa valeur minimum $m - 1$ en supposant

$$N_{m-2} = N_{m-3} = \ldots = N_1 = 0.$$

2. Théorème II. — *Il ne peut exister de groupe* G *deux fois transitif de degré m et d'ordre $m(m-1)$ que si m est une puissance d'un nombre premier, telle que p^n.*

Le groupe cherché G *sera contenu dans le groupe linéaire.*

Admettons que le groupe G existe, et suivons les conséquences de cette hypothèse. Le groupe H_a, formé par celles des substitutions de G qui laissent immobile une lettre donnée a, sera simplement transitif par rapport aux $m - 1$ lettres restantes, et aura pour ordre $m - 1$. Mais son ordre est égal à $(m-1)\Omega$, Ω étant l'ordre du groupe I formé par celles de ses substitutions qui laissent immobile une seconde lettre b; donc Ω se réduit à 1, et I ne contiendra d'autre substitution que l'unité.

Donc toutes les substitutions de Π_a, sauf l'unité, déplaceront $m-1$ lettres; donc les quantités $N_{m-2}, \ldots, N_1$, définies comme au numéro précédent, seront nulles, et *le nombre* Y *des substitutions de* G *qui déplacent m lettres sera égal à* $m-1$.

3. *Parmi ces* $m-1$ *substitutions* S, S′, ..., *il en existe une seule qui remplace une lettre donnée a par une autre lettre donnée b.*

En premier lieu, il en existe une. Soient, en effet, α une lettre quelconque, β celle que S lui fait succéder. Le groupe G, étant deux fois transitif, contiendra une substitution T qui remplace α et β par a et b; il contiendra la transformée $T^{-1}ST$, laquelle remplace a par b; d'ailleurs elle déplace évidemment toutes les lettres, et par suite fera partie du système S, S′, ...

En second lieu, il n'en existe qu'une. Supposons en effet qu'on eût deux substitutions distinctes S, S′ remplaçant a par b. Soit β l'une quelconque des $m-1$ lettres $b, c, \ldots$. Le groupe G contiendra une substitution U remplaçant a, b par a, β. Les transformées de S et de S′ par U seront deux substitutions distinctes, appartenant à la suite S, S′, ... et remplaçant a par β. Prenant successivement pour β chacune des $m-1$ lettres $b, c, \ldots$, on obtiendrait ainsi $2(m-1)$ substitutions distinctes contenues dans la suite S, S′, ..., résultat absurde, cette suite ne contenant que $m-1$ substitutions.

4. *Chacun des cycles de chacune des substitutions* S, S′, ... *contient le même nombre p de lettres.* Supposons en effet que S contînt un cycle $(\alpha\beta\ldots)$ de p lettres, et que S′, par exemple, en contînt un de q lettres $(\gamma\delta\ldots)$. Le groupe G contient une substitution T qui remplace α, β par a, b, et une substitution V qui remplace γ, δ par a, b. Les deux substitutions $T^{-1}S'T$, $V^{-1}S'V$ appartiendront à la suite S, S′, ... et remplaceront a par b. Elles devront donc se confondre, résultat absurde, car a et b font partie d'un cycle de p lettres dans $T^{-1}ST$, et d'un cycle de q lettres dans $V^{-1}S'V$.

5. *Le nombre p est premier.* En effet, soit $p = \lambda\mu$. Chaque cycle de S contenant p lettres, la substitution S^μ déplacera encore toutes les lettres et en contiendra λ dans chacun de ses cycles. Donc S^μ ferait

partie de la suite S, S′,..., résultat absurde, ses cycles contenant moins de p lettres.

6. *Les substitutions* S, S′,... *jointes à la substitution* 1 *forment un groupe* F. Soient, en effet, S et S′ deux d'entre elles. Leur produit SS′ appartiendra à la suite 1, S, S′,.... En effet, SS′ appartient à G; si elle déplace toutes les lettres, elle fera donc partie de la suite S, S′.... Supposons, au contraire, qu'elle laisse immobile une lettre a; les deux substitutions S et S'^{-1} remplaceront a par une même lettre. D'ailleurs chacune d'elles déplace toutes les lettres : donc elles seront identiques (3), et le produit SS′ se réduira à l'unité.

7. *Les substitutions de* G *sont permutables à* F. Car, d'une part, elles transforment S, S′,... en substitutions contenues dans G et qui déplacent toutes les lettres, et qui, par suite, se confondent à l'ordre près avec S, S′,...; et, d'autre part, elles transforment la substitution 1 en elle-même.

8. *Le nombre m est une puissance de p.* En effet, l'ordre du groupe F est égal à m; mais, en vertu d'un théorème de Cauchy (*Traité des substitutions*, n° 40), si cet ordre était divisible par un nombre premier q autre que p, F contiendrait une substitution d'ordre q, ce qui n'est pas. Donc m se réduit à une puissance de p, telle que p^n.

9. *L'une au moins des substitutions* S, S′,... *est échangeable à toutes les substitutions de* F. En effet, l'une quelconque des substitutions de F transformera S, S′,... en substitutions qui appartiennent à F et déplacent toutes les lettres, et qui, par suite, se confondront à l'ordre près avec celles de la suite S, S′,....

Cela posé, transformons successivement S, S′,... par les diverses substitutions de F. Les déplacements opérés sur les $p^n - 1$ termes de cette suite par ces diverses transformations formeront un groupe Γ isomorphe à F; l'ordre de ce groupe sera donc un diviseur de l'ordre de F (*Traité des substitutions*, n° 67); ce sera donc une puissance de p.

Groupons maintenant les $p^n - 1$ termes de la suite S, S′,... en

classes, en réunissant ensemble celles que les substitutions de Γ permutent les unes dans les autres, et soient $r, r', \ldots$ les nombres de termes contenus dans chaque classe. Chacun des nombres $r, r', \ldots$ sera un diviseur de m (*Traité des substitutions*, n° **44**), c'est-à-dire une puissance de p. On a d'ailleurs

$$r + r' + \ldots = p^n - 1.$$

Donc $r, r', \ldots$ ne peuvent être tous divisibles par p; donc quelques-uns de ces nombres devront se réduire à l'unité. Donc quelques-uns des termes de la suite S, S', ... ne seront déplacés par aucune des substitutions de Γ, ou, ce qui revient au même, ne seront pas altérés lorsqu'on les transforme par les substitutions de F.

10. *Toutes les substitutions de* F *sont échangeables entre elles.* Nous venons, en effet, de montrer que F contient des substitutions différentes de l'unité et échangeables à toutes les autres. Ces substitutions formeront évidemment un groupe E.

Cela posé, chacune des substitutions de G, étant permutable à F, transformera E en un groupe de substitutions contenues dans F et échangeables aux substitutions de F; ce groupe transformé ne sera donc autre que E. Or le groupe G est deux fois transitif, et *a fortiori* primitif. Donc le groupe E, permutable à ses substitutions, sera transitif (*Traité des substitutions*, n° **53**); donc son ordre sera un multiple du nombre p^n des lettres qu'il déplace. Donc E contient les p^n substitutions de F, et se confond avec lui.

(x, y, z, ...)

11. *On pourra caractériser les lettres par n indices $x, y, z, \ldots$, variables de zéro à $p-1$, et choisis de telle sorte que les substitutions de* F *prennent la forme*

$$| x, y, z, \ldots, x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots |$$

(cf. basis thm for abelian gps)

$x' = x + \alpha$
$y' = y + \beta$
$z' = z + \gamma$
etc.

(*Traité des substitutions*, n° **408**). Quant au groupe G, on l'obtiendra évidemment en joignant aux substitutions ci-dessus celles des substitutions de G qui laissent immobile l'une des racines, par exemple celle dont les indices sont tous nuls. Ces dernières substitutions formeront

un groupe H, transitif par rapport aux $m-1$ lettres restantes, et d'ordre $m-1$. Elles sont d'ailleurs permutables à F; elles seront donc de la forme linéaire

$$| x, y, \ldots, ax+by+\ldots, a'x+b'y+\ldots, \ldots | .$$

Traité des Substitutions, p. 91, 2.

Notre théorème est donc complétement démontré.

12. On voit, par ce qui précède, que la recherche du groupe G revient à celle d'un groupe H, simplement transitif, d'ordre et de degré p^n-1, et formé de substitutions linéaires sans termes constants. A chaque manière de déterminer le groupe H correspondra un groupe différent pour G; mais on ne devra considérer comme formes distinctes du groupe H que celles qui ne sont pas susceptibles d'être ramenées l'une à l'autre par un changement d'indices indépendants.

Supposons, en effet, que nous ayons trouvé deux groupes H et H′ tels, que les substitutions de H, rapportées aux indices $x, y, z, \ldots$, aient la même forme que les substitutions de H′, rapportées à de nouveaux indices $x', y', z', \ldots$, fonctions linéaires des précédents. Les substitutions de F, accroissant $x, y, z, \ldots$ de termes constants, accroîtront également $x', y', z', \ldots$ de termes constants. Ce groupe conservera donc la même forme, qu'il soit rapporté aux indices $x, y, z, \ldots$ ou aux indices $x', y', z', \ldots$. Donc le groupe $(H, F) = G$, rapporté aux indices $x, y, z, \ldots$, et le groupe $(H', F) = G'$, rapporté aux indices $x', y', z', \ldots$, auront la même forme. Ces deux groupes ne diffèrent donc que par la notation, et ne sont pas essentiellement distincts.

13. Théorème III. — *Pour qu'il existe un groupe* K $k+2$ *fois transitif de degré* $m+k$ *et d'ordre* $(m+k)(m+k-1)\ldots(m-1)$, *il faut : 1° que m soit une puissance de nombre premier; 2° que k ne surpasse pas l'unité.*

Ce théorème souffre les exceptions suivantes :

1° Si $m<5$, k pourra être quelconque, et K sera symétrique ou alterné;

2° Si $m=9$, on pourra poser $k=2$ ou 3, et l'on obtiendra pour

K le groupe 4 fois transitif de 11 lettres et le groupe 5 fois transitif de 12 lettres signalés par M. Émile Mathieu.

Démonstration. — Supposons que le groupe K existe. Le groupe partiel G, formé par celles de ses substitutions qui laissent immobiles k lettres choisies à volonté, sera deux fois transitif par rapport aux m lettres restantes, et aura pour ordre $m(m-1)$. Cela ne sera possible que si m est une puissance de nombre premier (théorème II). Soit donc $m = p^n$.

Cela posé, admettons que k soit > 1. Le groupe G, ayant pour ordre $m(m-1)$, qui est un multiple de 2, contiendra une substitution S d'ordre 2 (théorème de Cauchy). D'ailleurs chaque substitution de G déplace m ou $m-1$ lettres. Donc la substitution S déplacera $m-1$ lettres si p est impair, m lettres si p se réduit à 2.

14. *Premier cas.* — Supposons d'abord que p soit impair : S laissera immobile une lettre a parmi celles que déplacent les substitutions de G, et permutera les autres, $b, c, d, e, \ldots$, deux à deux. Soit donc

$$S = (bc)(de)\ldots.$$

Soient maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les k lettres du groupe K qui ne figurent pas dans les substitutions de G; le groupe K, étant $k+2$ fois transitif, contiendra une substitution T qui remplace les $k+1$ lettres $a, b, c, \gamma, \ldots$ respectivement par $a, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Soient $d', e', \ldots$ les lettres par lesquelles T remplace $d, e, \ldots$, lesquelles lettres appartiendront à la suite $b, c, d, e, \ldots$; le groupe K contiendra la substitution

$$U = T^{-1}ST = (\alpha\beta)(d'e')\ldots.$$

Cela posé, le groupe transformé de G par U est contenu dans K; d'autre part, il est clair qu'il ne déplace aucune lettre autre que $a, b, c, d, e, \ldots$ (car U permute ces lettres exclusivement ensemble); donc il se confond avec G, et la substitution U, ou, ce qui revient au même, la substitution

$$V = (d'e')\ldots$$

sera permutable à G. Elle le sera donc au groupe F formé par celles des substitutions de G qui déplacent toutes les lettres $a, b, c, d, e, \ldots$.

Mais on peut caractériser ces lettres par n indices, variables de zéro à $p-1$, et choisis de telle sorte que les substitutions de F prennent la forme

$$| x, y, \ldots, \quad x+\alpha, \quad y+\beta, \ldots |,$$

et que la lettre a ait tous ses indices nuls (**11**).

Cela posé, la substitution V, étant permutable à F et ne déplaçant pas a, sera de la forme linéaire sans termes constants

$$| x, \; y, \ldots, \quad ax+by+\ldots, \quad a'x+b'y+\ldots, \ldots |.$$

Le nombre des lettres de la suite $a, b, c, \ldots$ qu'elle laisse immobiles est une puissance de p. En effet, pour que V ne déplace pas la lettre $x, y, \ldots$, il faudra que l'on ait

$$x = ax+by+\ldots, \quad y = a'x+b'y+\ldots, \ldots,$$

et si, parmi ces équations, il en est $n-\mu$ distinctes, elles détermineront $n-\mu$ indices en fonction des autres, qui resteront arbitraires, et seront chacun susceptibles de p valeurs. On aura donc p^μ lettres non déplacées.

Mais S, et par suite, sa transformée U déplacent $m-1$ lettres; donc V en déplace $m-3$ et laisse 3 lettres immobiles, résultat incompatible avec le précédent, à moins que l'on n'ait $p=3$.

15. Discutons ce dernier cas. Supposons les indices indépendants choisis de manière à ramener S à sa forme canonique. Cette substitution, étant d'ordre 2, multipliera chaque indice par ± 1; mais il est clair qu'une substitution de cette forme laisse immobiles 3^μ lettres, μ étant le nombre des indices qu'elle n'altère pas. Donc S, ne laissant qu'une lettre immobile, sera de la forme

$$S = | x, \; y, \; z, \ldots \quad -x, \quad -y, \quad -z, \ldots | \text{ mod. } 3,$$

et cette forme ne sera altérée par aucun changement d'indices indépendants, car il est clair que S multipliera par -1 une fonction linéaire quelconque des indices x, y, z.

Profitons de cette indétermination dans le choix des indices pour

ramener V à sa forme canonique. Cette substitution, étant d'ordre 2, multipliera chaque indice par ± 1. D'ailleurs elle ne laisse que 3 lettres immobiles; donc elle altérera tous ces indices, à l'exception d'un seul. On aura donc

$$V = | x, y, z, \ldots, x, -y, -z, \ldots | \text{ mod. } 3,$$

d'où

$$VS = | x, y, z, \ldots, -x, y, z, \ldots | \text{ mod. } 3.$$

Cette dernière substitution laissera 3^{n-1} lettres immobiles et en déplacera $m - 3^{n-1}$. La substitution US, déplaçant en outre les deux lettres α, β, en déplacera en tout $m - 3^{n-1} + 2$. Mais elle appartient à K, dont toutes les substitutions déplacent au moins $m - 1$ lettres. On aura donc $n = 1$ ou 2, d'où $m = 3$ ou 9.

Sauf ces deux cas exceptionnels, le groupe K ne peut donc exister.

16. *Deuxième cas.* — Soit maintenant $p = 2$: S déplacera les m lettres $a, b, c, d, \ldots$. Soit

$$S = (ab)(cd)\ldots$$

et soient, comme précédemment, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les lettres de K qui ne figurent pas dans les substitutions de G. Le groupe K, étant $k+2$ fois transitif, contiendra une substitution T qui remplace $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par $\alpha, \beta, a, b, \gamma, \ldots$. Soient $c', d', \ldots$ les lettres que T fait succéder à $c, d, \ldots$, lesquelles lettres se confondront à l'ordre près avec $c, d, \ldots$. Le groupe K contiendra la substitution

$$U = T^{-1}ST = (\alpha\beta)(c'd')\ldots,$$

laquelle sera permutable à G. La substitution partielle

$$V = (c'd')\ldots$$

le sera également, et l'on pourra, comme tout à l'heure, la mettre sous la forme linéaire

$$| x, y, \ldots, ax + by + \ldots, a'x + b'y + \ldots, \ldots | \text{ mod. } 2.$$

D'ailleurs cette substitution déplace $m-2$ lettres et son ordre est égal à 2.

Remplaçons les indices $x, y, \ldots$ par d'autres indices indépendants, $X, Y, X', Y', \ldots, Z, \ldots$, choisis de telle sorte que V soit ramené à sa forme canonique. Pour que l'ordre de V se réduise à 2, il faut que cette forme canonique soit la suivante (*Traité des substitutions*, n° **159**) :

$$\left|\begin{array}{ll} X, \; Y, & X, \; Y+X \\ X', \; Y', & X', \; Y'+X' \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z & Z \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right| .$$

Soit ρ le nombre des indices $X, X', \ldots$, lequel est au plus la moitié du nombre total n; les $2^{n-\rho}$ lettres pour lesquelles $X = X' = \ldots = 0$ ne seront pas déplacées par V. Donc V ne déplace que $m - 2^{n-\rho}$ lettres; mais en doit déplacer $m-2$; donc $n-\rho = 1$ et $n \overset{=}{<} 2(n-\rho) \overset{=}{<} 2$, d'où $m \overset{=}{<} 2^2$.

Donc, ici encore, le groupe K ne peut exister, sauf les cas d'exception signalés dans l'énoncé du théorème.

17. L'examen de ces cas d'exception n'offre aucune difficulté. Si $m < 5$, K sera symétrique ou alterné, et son degré pourra être quelconque. Si $m = 9$, on opérera comme il suit :

En premier lieu, on cherchera à construire le groupe G, déplaçant 9 lettres, par rapport auxquelles il est deux fois transitif. Ce groupe s'obtiendra (théorème II) en joignant au groupe E, formé des substitutions

$$| \; x, y, \quad x+\alpha, \quad y+\beta \; | \text{ mod. } 3,$$

un groupe H, dont les substitutions soient de la forme

$$| \; x, y, \quad ax+by, \quad a'x+b'y \; | \text{ mod. } 3,$$

et qui soit d'ordre 8 et simplement transitif par rapport aux 8 lettres qu'il déplace.

Nous avons vu (**15**) que la seule substitution d'ordre 2 que H puisse contenir est la suivante :

$$S = | x, y, \quad -x, -y |.$$

Donc H contiendra au moins une substitution d'ordre 4 ou 8.

1° Si H contient une substitution T d'ordre 8, il sera exclusivement formé de ses puissances; d'ailleurs cette substitution aura pour forme canonique

$$| z, z_1, \quad iz, i^3 z_1 |,$$

i étant une racine primitive de la congruence

$$i^{3^2} \equiv 1 \bmod. 3,$$

et z, z_1 deux indices imaginaires conjugués de la forme $X + iY$, $X + i^p Y$, X et Y étant des fonctions linéaires des indices x et y; et l'on peut admettre, sans restreindre la généralité de la solution, que X et Y se réduisent respectivement à x et y (**12**).

2° Si H ne contient aucune substitution d'ordre 8, il contiendra une substitution T d'ordre 4, que l'on pourra mettre sous la forme canonique

$$T = | z, z_1, \quad i^2 z, i^6 z_1 |.$$

D'ailleurs il ne contient d'autre substitution d'ordre 2 que la substitution $S = T^2$. Donc il devra contenir une autre substitution U d'ordre 4 et différente des puissances de T. Il contiendra alors les 8 substitutions des formes T^ρ et $T^\rho U$, lesquelles sont évidemment distinctes. Il contient d'ailleurs $U^{-1}TU$. Cette substitution ne peut être de la forme $T^\rho U$, car de l'égalité $U^{-1}TU = T^\rho U$ on déduirait $U = T^{1-\rho}$, ce qui est inadmissible. Donc $U^{-1}TU$ sera une puissance de T.

Or il est aisé de voir que les substitutions d'ordre 4 qui transforment T en ses puissances dérivent toutes de la combinaison de la substitution

$$V = | z, z_1, \quad iz_1, i^3 z |$$

avec les puissances de T. Donc H sera dérivé des deux substitutions T et V.

On a donc, en résumé, deux manières distinctes de déterminer le groupe H. Soient H_1, H_2 ces deux groupes, $G_1 = (E, H_1)$, $G_2 = (E, H_2)$ les deux formes correspondantes du groupe G.

Cela fait, on essayera de s'élever progressivement de chacun des groupes G_1, G_2 à des groupes 3 fois, 4 fois,... transitifs par l'adjonction de substitutions contenant 1, 2,... lettres nouvelles, ainsi que nous l'avons indiqué ailleurs (*Traité des substitutions*, n° 45). Opérant ainsi, on verra sans difficulté :

1° Que le groupe G_1 donne naissance à un groupe 3 fois transitif, après lequel on est obligé de s'arrêter;

2° Que le groupe G_2 donne naissance successivement à un groupe 3 fois transitif, à un groupe 4 fois transitif, et enfin à un groupe 5 fois transitif.

Ces deux derniers groupes sont les groupes 4 et 5 fois transitifs de 11 et 12 lettres, découverts par M. Mathieu. Notre analyse montre que ces groupes sont tout à fait exceptionnels, du moins au point de vue où nous nous sommes placés; car il pourrait se faire qu'à d'autres égards ils pussent se rattacher à certaines familles de groupes encore inconnues.

§ II. — *Recherche des groupes primitifs appartenant à la classe q, q étant un nombre premier > 3.*

18. Tout groupe primitif K de la classe q contiendra par définition une substitution S qui ne déplace que q lettres. Si ces q lettres formaient plusieurs cycles, ils ne pourraient pas contenir tous le même nombre de lettres (q étant premier) : donc en élevant S à une puissance convenable, on obtiendrait une nouvelle substitution contenue dans H et laissant immobiles les lettres de l'un de ces cycles; cette nouvelle substitution déplaçant moins de q lettres, G ne serait pas de la classe q, comme on le suppose.

Donc S est une substitution circulaire entre q lettres, et si K a pour degré n, il sera $n - p + 1$ fois transitif (*Traité des substitutions*, note C). Les groupes G_{n-q}, G_{n-q+1},..., G_1 de degrés $n - 1$, $n - 2$,..., q, respectivement formés par celles des substitutions de K qui lais-

sent immobiles $1, 2, \ldots, n-q$ lettres, seront respectivement $n-q$, $n-q-1, \ldots, 1$ fois transitifs par rapport aux lettres qu'ils déplacent. Ils seront évidemment primitifs; car $G_{n-q}, \ldots, G_2$ sont plusieurs fois transitifs; quant à G_1, son degré étant premier, ses lettres ne peuvent se partager en systèmes (qui devraient être également nombreux). En outre, il est clair que chacun des groupes $G_1, G_2, \ldots, G_{n-q}$ appartiendra à la classe q.

Pour arriver à construire tous ces groupes primitifs cherchés, tels que K, on pourra donc opérer progressivement, en cherchant à construire les groupes G_1, puis les groupes deux fois transitifs, tels que G_2, etc.

19. Le groupe G_1 peut se construire dans tous les cas et d'une seule manière. En effet, il doit contenir S et ses puissances; mais il ne contient aucune autre substitution; car supposons qu'il en contînt une A remplaçant la lettre a par une autre lettre b. L'une des puissances de S, telle que S^z, remplacerait b par a, et G_1 contiendrait la substitution $S^z A$, qui déplacerait moins de q lettres, sans se réduire à l'unité, ce qui est absurde.

Si nous caractérisons les lettres de G_1 par un indice x variable de zéro à $q-1$ mod. q, les puissances de S, dont G_1 est dérivé, auront la forme suivante :

$$| \, x, \quad x+\alpha \, | \text{ mod. } q.$$

20. Cherchons maintenant à construire un groupe deux fois transitif G_2. Ce groupe, ayant pour ordre $q(q+1)$, ne pourra exister que si $q+1$ est une puissance de nombre premier (théorème II). Or $q+1$ est pair; donc il devra être une puissance de 2. Soit $q+1=2^n$, le groupe G_2 résultera de la combinaison des substitutions

$$| \, x, y, \ldots, \quad x+\alpha, \quad y+\beta, \ldots \, | \text{ mod. } 2$$

avec un groupe $G_1 = H$, d'ordre q et formé de substitutions linéaires (**11**).

Le groupe H, ayant pour ordre un nombre premier q, sera formé des puissances d'une seule substitution S, d'ordre $q = 2^n - 1$. Cette

substitution, ramenée à la forme canonique, sera nécessairement de la forme

$$S = | \; z, z_1, z_2, \ldots, \quad iz, i^2 z_1, i^4 z_2, \ldots \; |,$$

i étant une racine primitive de la congruence $i^q \equiv 1 \bmod 2$, z un indice imaginaire de la forme $X + iY + i^2 Z + \ldots$, et $z_1, z_2, \ldots$ ses conjugués obtenus en changeant i en $i^2, i^4, \ldots$; X, Y, Z, ... étant d'ailleurs des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$ qu'on peut, sans nuire à la généralité de la solution, supposer se confondre respectivement avec $x, y, z, \ldots$ (**12**).

Le groupe G_2 pourra donc toujours se construire, et d'une seule manière.

21. Passons à la détermination du groupe suivant G_3. Désignons maintenant par $a_0, a_1, \ldots, a_{q-1}$ les lettres de G_1, et soient

$$S = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

la substitution circulaire dont les puissances forment ce groupe, u la lettre nouvelle que déplace le groupe G_2, v la lettre nouvelle que G_2 ne déplaçait pas, mais que G_3 déplace. Le groupe G_3, contenant G_2, renfermera une substitution T_1 d'ordre 2 déplaçant $q+1$ lettres, et par suite laissant une lettre immobile; soient α cette lettre, ξ, y deux autres lettres formant un cycle dans T_1. Le groupe G_3, étant 3 fois transitif, contiendra une substitution U qui remplace α, ξ, y par a_0, u, v; il contiendra la substitution $U^{-1} T_1 U = \Theta$, laquelle contient le cycle (uv) et ne déplace pas a_0. On aura donc $\Theta = AB$, A étant la substitution qui permute u, v sans déplacer les autres lettres, et B une substitution d'ordre 2 ne déplaçant que les $q-1$ lettres $a_1, \ldots, a_{q-1}$. Le groupe G_3 contiendra la substitution $\Theta^{-1} S \Theta = B^{-1} S B$, laquelle, laissant u, v immobiles, appartient à G_1, et par suite se réduit à une puissance de S, telle que S^α. D'ailleurs, B^2 se réduisant à l'unité, on aura

$$S^{\alpha^2} = B^{-1} S^\alpha B = B^{-2} S B^2 = S,$$

d'où

$$\alpha^2 \equiv 1 \bmod. q, \quad \alpha \equiv \pm 1.$$

Mais α ne peut être égal à 1, car B, étant échangeable à S, devrait se réduire à l'unité, et Θ au cycle (uv), de telle sorte que G_3, au lieu d'appartenir à la classe q, appartiendrait à la classe 2. Donc B transformera S en S^{-1}, et par suite sera de la forme $(a_1 a_{q-1})(a_2 a_{q-2})\ldots$.

La substitution Θ ne pourra donc être déterminée que d'une seule manière. D'ailleurs cette substitution, jointe à celles de G_2, reproduira toutes celles de G_3; car ces substitutions, combinées ensemble, permettent d'amener v à la place d'une quelconque des $q+2$ lettres du groupe; après quoi les substitutions de G_2, qui ne déplacent pas v, permettront d'assigner aux autres lettres $q(q+1)$ systèmes de places différents. La combinaison de G_2 avec Θ fournit donc au moins $q(q+1)(q+2)$ substitutions distinctes, c'est-à-dire toutes celles de G_3.

22. Le groupe G_3 ne peut donc être construit que d'une seule manière. Encore faudrait-il, pour être assuré de son existence effective, vérifier que de la substitution Θ, jointe à G_2, on ne peut déduire aucune substitution déplaçant moins de q lettres. Mais cette vérification peut se faire immédiatement, en remarquant que les substitutions de la forme linéaire fractionnaire

$$\left| z \quad \frac{az+\alpha}{bz+\beta} \right| \text{mod. } 2,$$

où a, α, b, β, z sont des entiers complexes formés avec la racine i d'une congruence irréductible de degré n, z étant susceptible, en outre, de prendre ∞ pour valeur, forment un groupe trois fois transitif satisfaisant à toutes les conditions imposées à G_3.

23. S'il existait un groupe G_4, on verrait, comme tout à l'heure, qu'il pourrait s'obtenir en combinant à G_3 une substitution binaire de la forme $\Theta' = A'B'$, A' étant une substitution qui permute v avec une lettre nouvelle w, et B' une substitution qui transforme S en S^{-1}. Mais on aurait alors $B' = B$, et G_4, contenant la substitution $\Theta\Theta' = AA'$, qui ne déplace que 3 lettres, u, v, w, ne serait pas de la classe q. Donc l'existence du groupe G_4 est impossible dans tous les cas; à plus forte raison celle des groupes $G_5, \ldots$.

24. Nous obtenons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si le nombre premier q n'est pas de la forme $2^n - 1$, la classe q ne contiendra qu'un seul groupe, formé des puissances de la substitution circulaire*

$$| \; x \quad x + 1 \; | \text{ mod. } q.$$

Si q est de la forme $2^n - 1$, la classe p contiendra deux autres groupes des degrés $q + 1$ et $q + 2$, et respectivement formés des substitutions linéaires

$$| \; z \quad az + \alpha \; | \text{ mod. } 2$$

et des substitutions linéaires fractionnaires

$$\left| \; z \quad \frac{az + \alpha}{bz + \beta} \; \right|,$$

z, a, α, b, β étant des entiers complexes formés avec la racine i d'une congruence irréductible de degré n par rapport au module 2.

Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Nous nous proposons de donner ici la solution de la question suivante, dont nous avons examiné ailleurs quelques cas particuliers (*Comptes rendus*, 19 mars 1866; *Traité des Substitutions*, nos 197-200 et 259-260) :

Déterminer le nombre des solutions de la congruence du second degré à m inconnues

$$(1)\qquad a_1 x_1^2 + \ldots + a_m x_m^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots \equiv c \pmod{M}.$$

1. La question se ramène immédiatement au cas où le module M est une puissance d'un nombre premier.

Soit, en effet, $M = P^\lambda P_1^{\lambda_1}, \ldots$, P, P_1 étant des facteurs premiers différents. Soient $x_1, \ldots, x_m$ un système de solutions de la congruence (1); $\xi_1, \ldots, \xi_m$ les restes de la division de $x_1, \ldots, x_m$ par P^λ; $\eta_1, \ldots, \eta_m$ les restes de leur division par $P_1^{\lambda_1}, \ldots$; on aura évidemment

$$(2)\qquad a_1 \xi_1^2 + \ldots + a_m \xi_m^2 + b_{12} \xi_1 \xi_2 + \ldots \equiv c \pmod{P^\lambda},$$

$$(3)\qquad a_1 \eta_1^2 + \ldots + a_m \eta_m^2 + b_{12} \eta_1 \eta_2 + \ldots \equiv c \pmod{P_1^{\lambda_1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Réciproquement, soient $\xi_1, \ldots, \xi_m$ un système quelconque de solutions de la congruence (2); $\eta_1, \ldots, \eta_m$ un système de solutions de la congruence (3), etc. On sait qu'on pourra déterminer d'une seule ma-

nière un système d'entiers $x_1, \ldots, x_m$ inférieurs à M et satisfaisant aux conditions

$$x_\rho \equiv \xi_\rho \pmod{P^\lambda} \equiv \eta_\rho \pmod{P_1^{\lambda_1}} \equiv \ldots,$$

et ces entiers satisferont évidemment à la congruence (1); d'où cette première conclusion :

Le nombre des solutions de la congruence (1) *est égal au produit des nombres de solutions des congruences* (2), (3), *etc.*

Nous supposerons donc à l'avenir que M se réduise à P^λ, P étant premier. Deux cas seront à distinguer, suivant que P sera impair ou égal à 2.

PREMIER CAS : P PREMIER IMPAIR.

2. Soit P^α la plus haute puissance de P qui divise à la fois tous les coefficients du premier membre de la congruence considérée. En la mettant en évidence, la congruence prendra la forme

$$(4)\quad f(x_1, \ldots, x_m) = P^\alpha[a_1 x_1^2 + \ldots + a_m x_m^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots] \equiv c \pmod{P^\lambda},$$

et l'un au moins des coefficients $a_1, \ldots, a_m, b_{12}, \ldots$ sera premier à P. Il est permis de supposer que l'un des coefficients $a_1, \ldots, a_m$ des carrés des variables est premier à P. En effet, si l'on avait

$$a_1 \equiv \ldots \equiv a_m \equiv 0 \pmod{P},$$

mais $b_{12} \lessgtr 0 \pmod{P}$, par exemple, on pourrait poser $x_2 \equiv x'_2 + x_1$, et l'on aurait, pour déterminer les nouvelles variables $x_1, x'_2, x_3, \ldots$, une congruence analogue à (4), mais où le coefficient du terme en x_1^2 serait $a_1 + b_{12} + a_2$, nombre premier à P.

Soit donc $a_1 \gtrless 0 \pmod{P}$. On pourra déterminer des entiers $k_2, \ldots, k_m$ satisfaisant aux congruences

$$2 a_1 k_\rho \equiv b_{1\rho} \pmod{P^\lambda} \quad (\rho = 2, 3, \ldots, m),$$

et prenant pour nouvelle inconnue la quantité

$$X_1 \equiv x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_m x_m,$$

la congruence prendra la forme

$$P^\alpha a_1 X_1^2 + P^\alpha f_1(x_2, \ldots, x_m) \equiv c \pmod{P^\lambda}.$$

Si la fonction $f_1(x_2, \ldots, x_m)$ n'est pas identiquement congrue à zéro, on pourra opérer sur elle comme sur f, de manière à faire disparaître les rectangles d'une seconde variable.

Poursuivant ainsi, on voit qu'on pourra faire disparaître les rectangles de toutes les variables. Mettant alors en évidence les puissances de P qui peuvent diviser chaque coefficient, on pourra mettre la congruence sous la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = P^\alpha(A_1 X_1^2 + \ldots + A_p X_p^2) + P^\beta(B_1 Y_1^2 + \ldots + B_q Y_q^2) + \ldots \\ \equiv c \pmod{P^\lambda}. \end{aligned} \right.$$

3. Le nombre n des variables qui figurent explicitement dans cette congruence peut être inférieur à m. Dans ce cas, chacune des $m - n$ variables restantes prenant les valeurs de zéro à $P^\lambda - 1$, cette variation n'influera pas sur la valeur de la fonction Φ. Donc le nombre des solutions cherchées sera égal à $P^{\lambda(m-n)} Q$, Q étant le nombre des solutions de la congruence (5), où l'on ne considère plus d'autres variables que celles qui y figurent explicitement.

On peut supposer que les exposants $\alpha, \beta, \ldots$ soient rangés par ordre de grandeur croissante. Mais alors la congruence (5), à n variables, ne peut avoir de solution que si c est divisible par P^α. Soit $c = P^\alpha d$ et $\lambda - \alpha = \mu$. On pourra poser

$$(6) \qquad X_1 \equiv x_1 + P^\mu x'_1, \ldots, \quad Y_1 \equiv y_1 + P^\mu y'_1, \ldots,$$

$x_1, \ldots, y_1, \ldots$ étant des entiers moindres que P^μ, et $x'_1, \ldots, y'_1, \ldots$ des entiers moindres que P^α.

Chaque système de solutions de la congruence (5) donnera évidemment un système de solutions de la congruence

$$(7) \quad A_1 x_1^2 + \ldots + A_p x_p^2 + P^{\beta-\alpha}(B_1 y_1^2 + \ldots + B_q y_q^2) + \ldots \equiv d \pmod{P^\mu},$$

et réciproquement, à chaque système de solutions de cette congruence correspondront $P^{\alpha n}$ systèmes de solutions de la congruence (5), qui

s'obtiendront par les relations (6) en y donnant à $x'_1, \ldots, y'_1, \ldots$ tous les systèmes de valeurs possibles moindres que P^α. On aura donc

$$Q = P^{\alpha n} R,$$

R étant le nombre des solutions de la congruence (7).

4. Examinons donc cette dernière congruence. Ses solutions pourront être partagées en deux classes : 1° celles où l'un au moins des entiers $x_1, \ldots, x_p$ est premier à P ; 2° celles où $x_1 \equiv \ldots \equiv x_p \equiv 0 \pmod{P}$. Soient respectivement S_μ, T_μ les nombres de systèmes de solutions de chaque classe. On aura

$$R = S_\mu + T_\mu.$$

Solutions de la première classe. — Soit $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, \ldots$ un système de solutions de la première classe; et soient

$$(8) \qquad \begin{cases} x_\rho = x'_\rho + P^{\mu-1}\xi_\rho, & (\rho = 1, 2, \ldots, p); \\ y_\sigma = y'_\sigma + P^{\mu-1}\eta_\sigma, & (\sigma = 1, 2, \ldots, q); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$x'_\rho, y'_\sigma, \ldots$ étant $< P^{\mu-1}$, et $\xi_\rho, \eta_\sigma, \ldots < P$; on aura évidemment

$$(9) \quad A_1 x_1'^2 + \ldots + A_p x_1'^2 + P^\beta(B_1 y_1'^2 + \ldots + B_q y_1'^2) + \ldots \equiv d \pmod{P^{\mu-1}}.$$

D'ailleurs $x'_1, \ldots, x'_p$ ne sont pas tous nuls par hypothèse. Donc $x'_1, \ldots, x'_p, y'_1, \ldots, y'_q, \ldots$ est l'un des $S_{\mu-1}$ systèmes de solutions de première classe de la congruence (9).

Réciproquement, soit $x'_1, \ldots, x'_p, y'_1, \ldots, y'_q, \ldots$ l'un quelconque de ces $S_{\mu-1}$ systèmes de solutions; on aura une relation de la forme

$$A_1 x_1'^2 + \ldots + A_p x_1'^2 + P^\beta(B_1 y_1'^2 + \ldots + B_q y_1'^2) + \ldots \equiv d + e P^{\mu-1} \pmod{P^\mu},$$

et $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, \ldots$ satisferont à la congruence (7), si l'on détermine les entiers $\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q, \ldots$, de telle sorte que l'on ait

$$(10) \qquad 2A_1 x'_1 \xi_1 + \ldots + 2A_p x'_p \xi_p \equiv e \pmod{P}.$$

Or, par hypothèse, l'un au moins des entiers $x'_1, \ldots, x'_p$, par exemple x'_1, est premier à P. La congruence (10) détermine ξ_1, après qu'on aura choisi arbitrairement les $n-1$ autres quantités $\xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q, \ldots$, ce qui pourra se faire de P^{n-1} manières différentes.

On aura donc

$$S_\mu = P^{n-1} S_{\mu-1} = P^{2(n-1)} S_{\mu-2} = \ldots = P^{(\mu-1)(n-1)} S_1.$$

Il reste à déterminer S_1, c'est-à-dire le nombre des solutions de première classe de la congruence

$$(11) \quad A_1 x_1^2 + \ldots + A_p x_p^2 + P^{\beta-\alpha}(B_1 y_1^2 + \ldots + B_q y_q^2) + \ldots \equiv d \pmod{P}.$$

Or on peut donner à chacune des $n-p$ variables $y_1, \ldots, y_q, \ldots$ une valeur quelconque sans altérer la valeur (mod. P) du premier membre de cette congruence; on aura donc

$$S_1 = P^{n-p} U,$$

U étant le nombre des solutions de première classe de la congruence

$$(12) \qquad A_1 x_1^2 + \ldots + A_p x_p^2 \equiv d \pmod{P}.$$

Or nous avons déterminé (*Comptes rendus*, 19 mars 1866, ou *Traité de Substitutions*, n°s 197-200) le nombre total des solutions de la congruence (12). Ce nombre sera égal à U si $d \gtrless 0$ (mod. P); à $U+1$ dans le cas où $d \equiv 0$ (mod. P); car dans ce cas on a une solution de seconde classe $x_1 = \ldots = x_p = 0$.

Posant, pour abréger, suivant la notation de Legendre,

$$\left[\frac{(-1)^l A_1 \ldots A_{2l}}{P}\right] = \nu, \quad \left[\frac{(-1)^l A_1 \ldots A_{2l+1} d}{P}\right] = \nu',$$

on aura, d'après les formules de l'endroit cité :

1° Si $p = 2l$ et $d \gtrless 0$ (mod. P),

$$U = P^{2l-1} - P^{l-1} \nu;$$

2° Si $p = 2l+1$ et $d \gtrless 0$ (mod. P),

$$U = P^{2l} + P^l \nu';$$

3° Si $p = 2l$ et $d \equiv 0 \pmod{P}$,

$$U + 1 = P^{2l-1} + (P^l - P^{l-1})\nu;$$

4° Si $p = 2l + 1$ et $d \equiv 0 \pmod{P}$,

$$U + 1 = P^{2l}.$$

5. *Solutions de la seconde classe.* — Posons $x_\rho = Px'_\rho$. On aura à déterminer le nombre T_μ de solutions de la congruence

$$(13)\quad P^2(A_1 x'^2_1 + \ldots + A_p x'^2_p) + P^{\beta-\alpha}(B_1 y_1^2 + \ldots + B_q y_q^2) + \ldots \equiv d \pmod{P^\mu},$$

où $y_1, \ldots y_q$ varient de 0 à $P^\mu - 1$, et $x'_1, \ldots, x'_p$ de 0 à $P^{\mu-1} - 1$ seulement. Si l'on faisait varier les p quantités $x'_1, \ldots, x'_p$, non plus de 0 à $P^{\mu-1} - 1$, mais de 0 à $P^\mu - 1$, il est clair que le nombre des solutions de la congruence (13) deviendrait P^p fois plus considérable; on aura donc

$$T_\mu = P^{-p} V,$$

V étant le nombre des solutions de la congruence (13), où toutes les variables varient de 0 à $P^\mu - 1$.

Soit δ le plus petit des exposants $2, \beta - \alpha, \ldots$. La congruence (13) n'aura de solutions que si d est divisible par P^δ. Soit d'ailleurs $d = P^\delta d_1$. On aura, comme on l'a vu plus haut,

$$V = P^{\delta n} W,$$

W étant le nombre de solutions de la congruence

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{l} P^{2-\delta}(A_1 x'^2_1 + \ldots + A_p x'^2_p) + P^{\beta-\alpha-\delta}(B_1 y_1^2 + \ldots + B_q y_q^2) + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv d_1 \pmod{P^{\mu-\delta}}. \end{array} \right.$$

Cette congruence contient dans son premier membre un groupe de variables dont les coefficients sont premiers à P. Elle est donc analogue à la congruence (7), et ses solutions pourront être partagées en deux classes; le nombre des solutions de première classe s'obtenant directement; les solutions de seconde classe se ramenant à celles d'une

nouvelle congruence par rapport à un module $P^{\mu-\delta-\varepsilon}$ moindre que $P^{\mu-\delta}$. On poursuivra cette réduction jusqu'à ce qu'on arrive à une congruence ayant pour module P ou l'unité, auquel cas le nombre des solutions s'obtiendra immédiatement.

Nous laisserons au lecteur le soin d'écrire la formule définitive qui résulte de cette méthode.

6. L'analyse qui précède repose essentiellement, comme on a pu le voir, sur la propriété des congruences du second degré mod. P^λ (P premier impair) de pouvoir se réduire par un changement de variables à la forme canonique (5). Mais les diverses expressions que donne cette formule en y faisant varier α, β,... p, q,... A_1,..., A_p, B_1,..., B_q,... sont elles-mêmes réductibles à un moindre nombre. On peut, en effet, faire en sorte que les coefficients dans chacune des suites A_1,..., A_p, B_1,..., B_q,... se réduisent tous à l'unité, sauf l'un d'eux, qui pourra, suivant le cas, se réduire à l'unité ou à un nombre N choisi arbitrairement parmi les non-résidus quadratiques de P.

Pour le démontrer, considérons l'expression

$$A_1 X_1^2 + \ldots + A_p X_p^2. \tag{15}$$

Supposons que, parmi les coefficients A_1,..., A_p, il y en ait ρ qui soient non-résidus de P; si ce nombre ρ est > 1, on pourra l'abaisser de deux unités par un changement de variables.

Soient en effet A_1 et A_2 non-résidus; et soient R un résidu quelconque; a, c un système de solutions de la congruence

$$A_1 a^2 + A_2 c^2 \equiv R \pmod{P}, \tag{16}$$

on aura $a \gtrless 0$, $c \gtrless 0$ (mod. P), car si a était congru à zéro, on aurait $A_2 c^2 \equiv R$, ce qui est absurde, A_2 étant non-résidu.

Posons maintenant

$$X_1 \equiv a x_1 + b x_2, \quad X_2 \equiv c x_1 + d x_2, \tag{17}$$

l'expression (15) deviendra

$$\left\{\begin{aligned} &(A_1 a^2 + A_2 c^2) x_1^2 + 2(A_1 ab + A_2 cd) x_1 x_2 \\ &\qquad + (A_1 b^2 + A_2 d^2) x_2^2 + \ldots + A_p X_p^2. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

On peut, sans annuler le déterminant de la substitution (17), poser

$$(19) \qquad A_1 ab + A_2 cd \equiv 0 \pmod{P}.$$

En effet, ce déterminant sera égal à

$$ad - bc \equiv ad + \frac{A_2 c^2 d}{A_1 a} \equiv \frac{(A_1 a^2 + A_2 c^2) d}{A_1 a} \equiv \frac{R d}{A_1 a} \gtrless 0 \pmod{p}.$$

Supposons donc la condition (19) remplie. L'expression (18) transformée de l'expression (15) sera, comme cette dernière, une somme de carrés; mais les coefficients des deux nouvelles variables x_1, x_2 seront devenus des résidus. En effet, le coefficient de x_1 est égal à R, et celui de x_2 à

$$A_1 b^2 + A_2 d^2 \equiv A_1 \frac{A_2^2 c^2 d^2}{A_1^2 a^2} + A_2 d^2 \equiv \frac{A_1 A_2 R d^2}{A_1^2 a^2},$$

qui est évidemment un résidu.

On pourra donc préparer l'expression

$$A_1 X^2 + A_2 X_2^2 + \ldots + A_p X_p^2$$

de telle sorte que tous ses coefficients soient des résidus, sauf l'un d'entre eux A_1, pour lequel il y aura indécision. Cela posé, on saura déterminer des entiers $k_2, \ldots, k_p$ satisfaisant aux relations

$$A_2 k_2^2 \equiv 1, \ldots, \quad A_p k_p^2 \equiv 1.$$

On pourra de même satisfaire à la relation

$$A_1 k_1^2 \equiv \theta,$$

θ étant égal à 1 ou à N, suivant que A_1 est résidu ou non.

Posant maintenant

$$X_1 = k_1 x_1, \ldots, \quad X_p = k_p x_p,$$

l'expression considérée prend la forme

$$\theta x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_v^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

SECOND CAS : $P = 2$.

7. Soit 2^α la plus haute puissance de 2 qui divise tous les coefficients de la congruence considérée. Mettant ce facteur commun en évidence, la congruence prendra la forme

$$f(x_1, \ldots, x_m) = 2^\alpha [a_1 x_1^2 + \ldots + a_m x_m + b_{12} x_1 x_2 + \ldots] = c \pmod{2^\lambda}.$$

On peut supposer que les coefficients $a_1, \ldots, a_m$ des carrés des variables sont tous pairs, sauf deux d'entre eux tout au plus.

Supposons, en effet, qu'on ait a_1, a_2, a_3 impairs. Si l'un des coefficients b_{12}, b_{13}, b_{23}, par exemple b_{13}, est pair, on pourra poser

$$x_1 = x'_1 + x_3,$$

et obtenir ainsi entre les variables $x'_1, x_2, \ldots, x_m$ une nouvelle congruence équivalente à la proposée, mais où le coefficient de x_3^2 sera le nombre pair $a_1 + b_{13} + a_3$.

Si b_{12}, b_{13}, b_{23} sont impairs, on posera

$$x_1 \equiv x'_1 + x_3, \quad x_2 \equiv x'_2 + x_3,$$

et, après cette substitution, le coefficient de x_3^2 sera le nombre pair

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13} + b_{23}.$$

On pourra distinguer ici trois cas :

8. *Premier cas.* — Tous les a sont pairs. L'un des coefficients b, par exemple b_{12} sera impair. Soit 2^ρ la plus haute puissance de 2 qui divise a_1. Remplaçons x_2 par une nouvelle variable y_2, définie par la relation

$$x_2 = y_2 + 2^\rho x_1. \tag{20}$$

La congruence prendra la forme

$$2^{\alpha}[a'_1 x_1^2 + b'_{12} x_1 y_2 + a_2 y_2^2 + \ldots] \equiv c \pmod{2^{\lambda}},$$

en posant

$$a'_1 = a_1 + 2^{\rho} b_{12} + 2^{2\rho} a_2,$$
$$b'_{12} = b_{12} + 2^{\rho+1} a_2.$$

On voit immédiatement que b'_{12} sera impair et que a'_1 sera divisible au moins par $2^{\rho+1}$. Par une suite de transformations analogues, on augmentera progressivement le degré de la puissance de 2 qui divise le coefficient de la première variable, jusqu'à ce que ce coefficient, étant divisible par 2^{λ}, devienne congru à zéro (mod. 2^{λ}) et puisse être supprimé. On pourra ensuite, par un procédé analogue, faire disparaître le carré de la seconde variable.

Il nous est donc permis de supposer $a_1 \equiv a_2 \equiv 0$ (mod. 2^{λ}), avec $b_{12} \equiv 1$ (mod. 2); mais alors on pourra déterminer des entiers $k_3, \ldots, k_m$ satisfaisant aux relations

$$b_{1\rho} \equiv k_{\rho} b_{12} \pmod{2^{\lambda}}.$$

Prenant alors pour variables indépendantes, au lieu de x_1, x_2, celles-ci

$$x \equiv b_{12} x_1 + b_{23} x_3 + \ldots + b_{2m} x_m,$$
$$y \equiv \quad x_2 + k_3\, x_3 + \ldots + k_m\, x_m,$$

la congruence proposée deviendra

$$2^{\alpha} xy + 2^{\alpha} f_1(x_3, \ldots, x_m) \equiv c \pmod{2^{\lambda}},$$

et l'on aura ainsi un groupe de deux variables séparées des autres, et ne figurant plus que par leur rectangle.

9. *Deuxième cas.* — Tous les a sont pairs, sauf a_1. Chacun des coefficients $b_{12}, \ldots, b_{1m}$ sera pair. En effet, si b_{13} par exemple était impair, on n'aurait qu'à poser $x_3 = x'_3 + x_1$ pour rendre pair le coefficient de x_1^2 et retomber sur le premier cas. Cela posé, on pourra dé-

terminer des entiers $k_2, \ldots, k_m$ par les relations

$$2a_1 k_\rho \equiv b_{1\rho};$$

et prenant pour variable $z = x_1 + k_2 x_2 + \ldots$, la congruence prendra la forme

$$2^\alpha a_1 z^2 + 2^\alpha f_1(x_2, \ldots, x_m) \equiv c \pmod{2^\lambda},$$

où la variable z est séparée.

Troisième cas. — a_1 et a_2 impairs. Chacune des quantités $b_{13}, \ldots, b_{1m}, b_{23}, \ldots, b_{2m}$ est paire; car si b_{13} était impair, on pourrait rendre pair le coefficient de x_1^2 et retomber ainsi sur le deuxième cas. Au contraire, b_{12} sera impair; car, s'il était pair, il suffirait de poser $x_2 = x'_2 + x_1$ pour rendre pair le coefficient de x_1^2.

Cela posé, soient k_ρ, l_ρ des entiers déterminés par les relations

$$(21) \qquad \begin{cases} 2a_1 k_\rho + b_{12} l_\rho \equiv b_{1\rho}, \\ b_{12} k_\rho + 2a_2 l_\rho \equiv b_{2\rho}, \end{cases}$$

(dont le déterminant est impair). Prenons pour variables, au lieu de x_1 et x_2, les suivantes

$$u \equiv x_1 + k_3 x_3 + \ldots, \quad v \equiv x_2 + l_3 x_3 + \ldots.$$

La congruence deviendra

$$2^\alpha (a_1 u^2 + b_{12} uv + a_2 v^2) + 2^\alpha f_1(x_3, \ldots, x_m) \equiv c \pmod{2^\lambda}.$$

10. Nous obtenons ainsi dans chaque cas un mode de réduction de la fonction f à une forme plus simple; opérant de même sur la fonction f_1 à $n-1$ ou $n-2$ variables, on arrivera évidemment à mettre la congruence sous la forme

$$(22) \qquad 2^\alpha \Sigma_\alpha + 2^\beta \Sigma_\beta + \ldots \equiv c \pmod{2^\lambda},$$

l'une quelconque des suites $\Sigma_\alpha, \ldots$ pouvant être composée de trois parties :

1° Une somme de rectangles

$$x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p;$$

2° Une somme de carrés, multipliés par des coefficients impairs,

$$A_1 z_1^2 + \ldots + A_q z_q^2;$$

3° Des groupes de trois termes à coefficients impairs, tels que

$$B_1 u_1^2 + C_1 u_1 v_1 + D_1 v_1^2, \ldots, \quad B_r u_r^2 + C_r u_r v_r + D_r v_r^2.$$

D'ailleurs la suite considérée pourra ne pas contenir à la fois ces trois sortes de termes; auquel cas un, ou même deux des nombres p, q, r, se réduirait à zéro. Mais si tous trois s'annulaient à la fois, la suite ne contiendrait plus aucun terme et s'évanouirait.

Si nous convenons de poser $\Sigma_\rho = 0$ toutes les fois que ρ n'est pas l'un des nombres α, β,..., il est clair que la congruence (22) pourra s'écrire

$$(23) \qquad \sum_{\rho=0}^{\rho=\lambda-1} 2^\rho \Sigma_\rho \equiv c \pmod{2^\lambda},$$

expression qui pourra être considérée comme la forme canonique des congruences du second degré (mod. 2^λ).

En faisant varier la répartition des indices entre les diverses suites Σ_1,... et entre les trois parties de chacune de ces suites, ainsi que les coefficients A_1,..., A_q, B_1, C_1, D_1,... qui les multiplient, on obtiendra beaucoup de formes diverses; mais plusieurs d'entre elles pourront se ramener les unes aux autres par un changement d'indices. Pour éliminer les formes réduites qui font ainsi double emploi, il sera nécessaire d'assujettir celles que l'on conserve à certaines conditions que nous allons indiquer.

11. 1° Aucune des suites Σ_ρ ne doit contenir à la fois des termes de deuxième espèce, $Az^2 + \ldots$, et des termes de troisième espèce, $Bu^2 + Cuv + Du^2 + \ldots$.

Nous allons montrer, en effet, que les formes réduites où cette cir-

constance se présenterait se ramènent à d'autres qui ne contiennent plus de termes de troisième espèce.

Posons, en effet,

$$z \equiv z' + \delta u' + \varepsilon v', \quad u \equiv 2z' + u', \quad v \equiv 2z' + v',$$

substitution permise, car son déterminant $\equiv 1 \pmod{2}$; l'expression

$$Az^2 + Bu^2 + Cuv + Du^2$$

sera transformée en

$$(A + 4B + 4C + 4D)z'^2 + (A\delta^2 + B)u'^2 + (A\varepsilon^2 + D)v'^2$$
$$(2A\delta + 4B + 2C)z'u' + (2A\varepsilon + 2C + 4D)z'v' + (2A\delta\varepsilon + C)u'v'.$$

Posons maintenant

$$2A\delta + 4B + 2C \equiv 0 \pmod{2^\lambda},$$
$$2A\varepsilon + 2C + 4D \equiv 0.$$

Ces congruences donneront pour δ et ε des valeurs impaires (A, B, C, D étant impairs) qui, substituées dans les coefficients de u'^2, v'^2, $u'v'$, rendront les deux premiers pairs et le dernier impair. En opérant comme au n° **8**, on pourra donc remplacer u', v' par deux nouveaux indices x, y qui ne figurent plus que par leur rectangle dans l'expression de Σ_ρ.

Si Σ_ρ renfermait d'autres groupes de termes de troisième espèce, on les ferait disparaître de la même manière, en leur substituant de simples rectangles.

12. 2° La suite Σ_ρ ne peut contenir plusieurs groupes de termes de troisième espèce.

Soit, en effet,

$$\Sigma_\rho = B_1 u_1^2 + C_1 u_1 v_1 + D_1 v_1^2 + B_2 u_2^2 + C_2 u_2 v_2 + D_2 v_2^2 + \ldots.$$

Nous allons montrer que par une transformation convenable on peut remplacer les six termes ci-dessus écrits par une somme de deux rectangles.

Posons

$$u_1 = x + z + u, \quad v_1 = y + z + u,$$
$$u_2 = z + x + y, \quad v_2 = u + x + y,$$

substitution permise, car son déterminant $\equiv 1 \pmod{2}$. Il viendra

$$\Sigma_\rho = \mathfrak{A} x^2 + \mathfrak{A}_1 y^2 + \mathfrak{A}_2 z^2 + \mathfrak{A}_3 u^2 + \mathfrak{B} xy + \mathfrak{C} xz$$
$$+ \mathfrak{C}_1 xu + \mathfrak{C}_2 yz + \mathfrak{C}_3 yu + \mathfrak{B}_1 zu,$$

en posant

$$\mathfrak{A} = B_1 + B_2 + C_2 + D_2, \quad \mathfrak{A}_1 = D_1 + B_2 + C_2 + D_2, \ldots,$$
$$\mathfrak{B} = C_1 + 2B_2 + 2C_2 + 2D_2, \quad \mathfrak{B}_1 = C_2 + 2B_1 + 2C_1 + 2D_1,$$
$$\mathfrak{C} = 2B_1 + C_1 + 2B_2 + C_2, \quad \mathfrak{C}_1 = 2B_1 + C_1 + 2D_2 + C_2, \ldots.$$

Il résulte de ces expressions que $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1, \ldots$ sont pairs, et $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ impairs. On pourra donc, en opérant comme au n° **8**, remplacer x, y par deux nouveaux indices x', y', choisis de telle sorte que leurs carrés disparaissent de l'expression de Σ_ρ, laquelle se réduira à la forme

$$\Sigma_\rho = \mathfrak{B}' x' y' + \mathfrak{C}' x' z + \mathfrak{C}'_1 x' u + \mathfrak{C}'_2 y' z + \mathfrak{C}'_3 y' u$$
$$+ \mathfrak{A}_2 z^2 + \mathfrak{A}_3 u^2 + \mathfrak{B}_1 zu,$$

$\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{C}'_2$, $\mathfrak{C}'_3$ étant des fonctions linéaires entières de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ et, par suite, des nombres pairs.

Posant maintenant

$$x_1 \equiv \mathfrak{B}' x' + \mathfrak{C}'_2 z + \mathfrak{C}'_3 u, \quad \mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{B}' k,$$
$$y_1 \equiv y' + kz + lu, \quad \mathfrak{C}'_1 \equiv \mathfrak{B}' l,$$

il vient

$$\Sigma_\rho = x_1 y_1 + (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{C}'_2 k) z^2 + (\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{C}'_3 l) u^2 + (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{C}'_2 l - \mathfrak{C}'_3 k) zu;$$

les coefficients de z^2, u^2, dans cette expression, étant pairs et celui de zu impair, on pourra, par une dernière transformation (n° **8**), faire disparaître les carrés et mettre Σ_ρ sous la forme

$$x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

13. 3° Σ_ρ ne peut contenir plus de deux termes de seconde espèce. Soit, en effet,

$$\Sigma_\rho = A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + A_3 z_3^2 + \ldots.$$

Nous allons montrer qu'on peut, par une transformation convenable, réduire le nombre des termes de seconde espèce.

Posons

$$z_1 = x + z, \quad z_2 = y + z, \quad z_3 = z - kx - ly,$$

où k, l sont des entiers impairs, déterminés par les relations

$$A_1 \equiv A_3 k, \quad A_2 \equiv A_3 l$$

(cette substitution est admissible, car son déterminant $1 + k + l$ est impair) : il viendra

$$\Sigma_\rho = A_1(1+k)x^2 + 2kl\,xy + A_2(1+l)y^2 + (A_1 + A_2 + A_3)z^2;$$

mais, dans cette expression, tous les coefficients sont pairs, sauf celui de z^2. On pourra donc mettre 2 en facteur commun dans les trois premiers termes de cette expression, et reporter ces termes dans la suite $\Sigma_{\rho+1}$, de telle sorte que, des trois carrés mis en évidence dans Σ_ρ, il n'en reste plus qu'un.

On remarquera que, k et l étant impairs, l'expression

$$2\left(A_1 \frac{1+k}{2} x^2 + kl\,xy + A_2 \frac{1+l}{2} y^2\right)$$

pourra se ramener à la forme $2xy$ par un changement de variables si l'un des entiers $\frac{1+k}{2}$, $\frac{1+l}{2}$ est pair; dans le cas contraire, à la forme

$$2(Bu^2 + Cuv + Du^2).$$

14. D'après ce qui précède, on peut admettre que Σ_ρ se réduira à

l'une des quatre formes suivantes :

$$(24) \qquad S_\rho,$$

$$(25) \qquad S_\rho + Az^2,$$

$$(26) \qquad S_\rho + Az^2 + A_1 z_1^2,$$

$$(27) \qquad S_\rho + Bu^2 + Cuv + Dv^2,$$

S_ρ désignant une somme de rectangles, telle que $x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p$ (le nombre p de ces rectangles peut d'ailleurs se réduire à zéro), et A, A_1, B, C, D étant des entiers impairs.

On peut d'ailleurs exclure le cas où $\Sigma_{\lambda-1}$ serait de la forme (26).

En effet, si l'on avait

$$\Sigma_{\lambda-1} = S_{\lambda-1} + Az^2 + A_1 z_1^2,$$

on n'aurait qu'à poser

$$z = z' + z'_1, \quad z_1 = z'_1,$$

pour changer l'expression $2^{\lambda-1}\Sigma_{\lambda-1}$ en

$$2^{\lambda-1}[S_{\lambda-1} + Az'^2 + 2Az'z'_1 + (A+A_1)z_1'^2] \equiv 2^{\lambda-1}(S_{\lambda-1} + Az'^2) \pmod{2^\lambda},$$

expression analogue à la précédente, mais qui ne contient plus qu'un seul carré.

Nous allons maintenant passer à un second ordre de conditions, en cherchant quelles limitations on peut imposer aux valeurs des coefficients A, A_1, B, C, D.

15. *Premier cas.* — Admettons d'abord que Σ_ρ soit de la forme (27); on pourra y supposer $B = C = D = 1$. Nous allons montrer, en effet, qu'on peut atteindre ce résultat par un changement de variables.

Posons

$$(28) \qquad \begin{cases} u \equiv \alpha u' + \beta v', \\ v \equiv \gamma u' + \delta v'. \end{cases}$$

Il viendra

$$\Sigma_\rho = S_\rho + A'u'^2 + B'u'v' + C'v'^2,$$

expression qui remplira les conditions voulues si l'on a

$$(29)\qquad \left.\begin{array}{l} A' = A\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2 \equiv 1 \\ B' = 2A\alpha\beta + B(\delta\alpha + \beta\gamma) + 2C\gamma\delta \equiv 1 \\ C' = A\beta^2 + B\beta\delta + C\delta^2 \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2^\lambda},$$

auxquelles il faudra ajouter la suivante :

$$(30)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0 \pmod{2},$$

pour que la substitution (28) soit admissible. Mais cette condition découle des trois autres. En effet, pour qu'elle ne fût pas satisfaite, il faudrait qu'on eût

α et β pairs,	d'où	B' pair,
α et γ id.		A' id.
δ et β id.		B' id.
δ et γ id.		C' id.
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, impairs,		B' id.

ce qui serait contraire aux relations (29). Il ne nous reste donc qu'à satisfaire à celles-ci.

Or ces congruences sont satisfaites si $\lambda = 1$ par les valeurs $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, et nous allons montrer que, si l'on peut y satisfaire pour $\lambda = \mu$, on pourra y satisfaire pour $\lambda = \mu + 1$.

Soit, en effet, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ un système de solutions pour lequel on ait

$$\left.\begin{array}{l} A' \equiv 1 \\ B' \equiv 1 \\ C' \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2^\mu}, \quad \left.\begin{array}{l} \equiv 1 + e\,2^\mu \\ \equiv 1 + f\,2^\mu \\ \equiv 1 + g\,2^\mu \end{array}\right\} \pmod{2^{\mu+1}}.$$

Remplaçons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par $\alpha + 2^\mu\alpha'$, $\beta + 2^\mu\beta', \ldots$; pour que ces nouvelles valeurs donnent

$$A' \equiv B' \equiv C' \equiv 1 \pmod{2^{\mu+1}},$$

il faudra que l'on ait

$$\left.\begin{array}{ll} 1 + e\,2^{\mu} + 2^{\mu}\mathrm{B}(\alpha\gamma' + \gamma\alpha') & \equiv 1 \\ 1 + f\,2^{\mu} + 2^{\mu}\mathrm{B}(\alpha\delta' + \delta\alpha' + \gamma\beta' + \beta\gamma') & \equiv 1 \\ 1 + g\,2^{\mu} + 2^{\mu}\mathrm{B}(\delta\beta' + \beta\delta') & \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2^{\mu+1}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left.\begin{array}{lll} (31) & \mathrm{B}(\alpha\gamma' + \gamma\alpha') & \equiv e \\ (32) & \mathrm{B}(\alpha\delta' + \delta\alpha' + \gamma\beta' + \beta\gamma') & \equiv f \\ (33) & \mathrm{B}(\delta\beta' + \beta\delta') & \equiv g \end{array}\right\} \pmod{2}.$$

Or α, β, γ, δ satisfaisant, comme on l'a vu, à la relation (30), β et δ ne seront pas pairs tous deux à la fois. Donc la relation (33) permettra toujours de déterminer l'une des quantités β', δ' en fonction de l'autre. Cela fait, α' et γ' seront déterminés sans difficulté par les congruences (31) et (32), dont le déterminant par rapport à ces variables est le nombre impair $\alpha\delta - \beta\gamma$.

16. *Deuxième cas.* — Supposons maintenant que Σ_ρ soit de la forme (25) : on pourra supposer $A < 8$.

Nous allons en effet donner le moyen de transformer au besoin cette expression en une autre semblable, où le coefficient A soit remplacé par a, reste de la division de A par 8.

Soit $A = a + e\,2^{\rho}$, e étant impair et ρ étant au moins égal à 3, puisque $A - a$ est divisible par 8. Posons

$$z = (1 + \alpha\,2^{\rho-1})\,z';$$

$A z^2$ sera changé en $A' z'^2$, et l'on aura

$$A' = (a + e\,2^{\rho})(1 + \alpha\,2^{\rho-1})^2 = a + (e + a\alpha)\,2^{\rho} + a\alpha\,2^{2\rho-2} + \ldots.$$

Si donc on détermine α par la relation

$$e + a\alpha \equiv 0 \pmod{2},$$

on aura

$$A' \equiv a \pmod{2^{\rho+1}},$$

et, par suite,

$$A' = a + e' 2^{\sigma},$$

e' étant impair et $\sigma > \rho$. Renouvelant cette manière de procéder, on transformera $A' z'^2$ en $A'' z''^2$, A'' étant de la forme

$$a + e'' 2^{\tau}, \quad \tau > \sigma;$$

et, continuant ainsi, on arrive à faire en sorte que le coefficient du carré ne diffère de a que par des multiples du module 2^{λ}, lesquels peuvent être négligés.

On pourra donc supposer que A est < 8 et, par suite, se réduit à l'un des quatre nombres 1, 3, 5, 7.

17. De nouvelles limitations seront possibles si $\Sigma_{\rho+1}$ et $\Sigma_{\rho+2}$ sont eux-mêmes de la forme (25) ou de la forme (26).

1° Si $\Sigma_{\rho+1}$ est de la forme (25), on pourra supposer que le coefficient A du carré contenu dans Σ_{ρ} est congru à 1 (mod. 4).

Soit, en effet,

$$\Sigma_{\rho} = S_{\rho} + A z^2, \quad \Sigma_{\rho+1} = S_{\rho+1} + \mathfrak{b} \zeta^2,$$

et admettons que $A \equiv 3$ (mod. 4). Nous poserons

$$z = z' + 2\mathfrak{b}\zeta', \quad \zeta = \zeta' - A z',$$

substitution qui transformera

$$2^{\rho} \Sigma_{\rho} + 2^{\rho+1} \Sigma_{\rho+1} \equiv 2^{\rho} (S_{\rho} + A z^2 + 2 S_{\rho+1} + 2\mathfrak{b}\zeta^2)$$

en

$$2^{\rho} [S_{\rho} + (A + 2\mathfrak{b} A^2) z'^2 + 2 S_{\rho+1} + 2(\mathfrak{b} + 2A) \zeta'^2),$$

expression de même forme, mais où le coefficient de z'^2 est égal à

$$A + 2\mathfrak{b} A^2 \equiv A + 2\mathfrak{b} \equiv A + 2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 4).$$

2° Si $\Sigma_{\rho+1}$ est de la forme (26), auquel cas l'on aura

$$\Sigma_{\rho} = S_{\rho} + A z^2, \quad \Sigma_{\rho+1} = S_{\rho+1} + \mathfrak{b} \zeta^2 + \mathfrak{b}_1 \zeta_1^2,$$

on pourra de même supposer $A \equiv 1 \pmod{4}$; mais si de plus on a

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 \equiv 2 \pmod{4},$$

on pourra supposer $A \equiv 1$.

En effet, le changement de variables du numéro précédent permet de transformer l'expression proposée de telle sorte que le coefficient de la nouvelle variable qui figure dans Σ_ρ devienne

$$A + 2\mathcal{A}A^2 \equiv A + 2\mathcal{A} \pmod{8}.$$

On pourra de même changer ce coefficient en $A + 2\mathcal{A}_1 \pmod{8}$, ou par deux transformations successives en $A + 2\mathcal{A} + 2\mathcal{A}_1 \pmod{8}$. Cela posé, parmi les quatre nombres

$$A, \quad A + 2\mathcal{A}, \quad A + 2\mathcal{A}_1, \quad A + 2\mathcal{A} + 2\mathcal{A}_1,$$

il est aisé de voir qu'il y en aura au moins un égal à $1 \pmod{8}$; et l'on pourra par une transformation nouvelle, indiquée ci-dessus, le réduire à son résidu minimum 1.

3° Si $\Sigma_{\rho+2}$ est de l'une des deux formes (25) ou (26), on pourra supposer $A < 4 \pmod{8}$.

Soit en effet, pour fixer ces idées,

$$\Sigma_\rho = S_\rho + Az^2, \quad \Sigma_{\rho+2} = S_{\rho+2} + \mathcal{A}\zeta^2.$$

Si $A > 4 \pmod{8}$, posons

$$z = z' + 4\mathcal{A}\zeta', \quad \zeta = \zeta' - Az'.$$

Les termes $2^\rho(Az^2 + 4\mathcal{A}\zeta^2)$ contenus dans la somme $2^\rho\Sigma_\rho + 2^{\rho+2}\Sigma_{\rho+2}$ seront transformés en

$$2^\rho[(A + 4\mathcal{A}A^2)z'^2 + 4(\mathcal{A} + 4A\mathcal{A}^2)\zeta'^2].$$

expression analogue à la précédente, mais où le coefficient de z'^2 est égal à

$$A + 4\mathcal{A}A^2 \equiv A + 4\mathcal{A} \equiv A + 4 < 4 \pmod{8}.$$

18. *Troisième cas.* — Supposons que Σ_ρ soit de la forme (26). On pourra supposer

$$A \underset{<}{\equiv} A_1 \pmod{4}, \quad A < 4, \quad A_1 < 8.$$

En effet, si l'on avait $A > A_1 \pmod{4}$, on n'aurait qu'à changer z en z_1 et réciproquement pour renverser le sens de l'inégalité.

En second lieu, nous allons montrer qu'on peut supposer

$$A < 4 \pmod{8}.$$

Soit en effet

$$A \equiv 4 + \alpha \pmod{8},$$

α étant < 4. Posons

$$z = z' + 2A_1 z'_1, \quad z_1 = z'_1 - 2Az'.$$

L'expression

$$Az^2 + A_1 z_1^2$$

sera transformée en une expression analogue

$$(A + 4A_1^2) z'^2 + (A_1 + 4A^2) z_1'^2.$$

Mais $A_1^2 \equiv 1 \pmod{8}$, d'où

$$A + 4A_1^2 \equiv A + 4 \equiv \alpha \pmod{8}.$$

L'expression transformée jouit donc de la propriété annoncée, que le reste de la division de son premier coefficient par 8 soit < 4.

Cela posé, la transformation du cas précédent, appliquée successivement aux deux termes Az^2, $A_1 z_1^2$, permettra de réduire leurs coefficients à leurs résidus (mod. 8), ce qu'il fallait démontrer.

19. La considération des suites $\Sigma_{\rho+1}$, $\Sigma_{\rho+2}$ permet d'introduire de nouvelles limitations.

1° Si $\Sigma_{\rho+1}$ ne se réduit pas à zéro, on pourra faire en sorte que A se réduise à l'unité.

Supposons d'abord que $\Sigma_{\rho+1}$ contienne un carré $\mathcal{A}\zeta^2$; nous avons

vu qu'on peut supposer dans ce cas $A \equiv 1 \pmod{4}$; d'ailleurs $A < 4$; donc $A = 1$.

Supposons, en second lieu, que $\Sigma_{\rho+1}$ contienne un rectangle tel que xy. La substitution

$$\begin{aligned} x &= x' - Az' - A_1 z'_1, \\ y &= y' - Az' - A_1 z'_1, \\ z &= z' + x' + y', \\ z_1 &= z'_1 + x' + y' \end{aligned}$$

de déterminant impair, opérée sur l'expression

$$2^\rho \Sigma_\rho + 2^{\rho+1} \Sigma_{\rho+1} = 2^\rho [S_\rho + Az^2 + A_1 z'^2_2 + 2(xy + \ldots)],$$

la transforme en une expression analogue

$$\begin{aligned} 2_\rho [S_\rho &+ (A + 2A^2) z'^2 + 4AA_1 z' z'_1 + (A_1 + 2A_1^2) z_1'^2 \\ &+ (A + A_1) x'^2 + (2A + 2A_1 + 2) x'y' + (A + A_1) y'^2 + \ldots]. \end{aligned}$$

Les termes en x', y', ayant leurs coefficients pairs, peuvent être joints aux autres termes de $\Sigma_{\rho+1}$. D'autre part, soit k un entier tel que l'on ait

$$(A_1 + 2A_1^2) k \equiv AA_1 \pmod{2^\lambda},$$

et faisons $z'_1 + kz' = z''_1$. Les autres termes de l'équation précédente pourront se mettre sous la forme

$$(34) \qquad S_\rho + (A + 2A^2 - 4k^2) z'^2 + (A_1 + 2A_1^2) z''^2_1.$$

Or on a, A et A_1 étant impairs, ainsi que k,

$$\begin{aligned} A_1 + 2A_1^2 &\equiv A_1 + 2 \pmod{8}, \\ A + 2A^2 - 4k^2 &\equiv A - 2 \pmod{8}. \end{aligned}$$

On pourra donc, en appliquant les transformations indiquées plus haut, mettre l'expression (34) sous la forme

$$S_\rho + (A - 2) z^2 + (A_1 + 2) z_1^2.$$

Or, par hypothèse, on avait $A < 4$; si donc il différait de l'unité, il était égal à 3; donc $A - 2 = 1$. Il est donc prouvé que l'on peut ramener à l'unité le coefficient du premier carré.

Supposons enfin que $\Sigma_{\rho+1}$ ne contienne ni rectangle ni carré isolé, mais soit de la forme $u^2 + uv + v^2$. On emploiera la substitution à déterminant impair

$$\begin{aligned} u &= u' - Az' - A_1 z'_1, \\ v &= v' - Az' - A_1 z'_1, \\ z &= 3z' + u' + v', \\ z_1 &= 3z'_1 + u' + v', \end{aligned}$$

qui transformera $2^\rho \Sigma_\rho + 2^{\rho+1} \Sigma_{\rho+1}$ en

$$\begin{aligned} 2^\rho [S_\rho &+ (9A + 6A^2)z'^2 - 12AA_1 z'z'_1 + (9A_1 + 6A_1^2)z_1'^2 \\ &+ (A + A_1 + 2)u'^2 + (2A + 2A_1 + 2)u'v' + (A + A_1 + 2)v'^2]. \end{aligned}$$

Les termes en u', v' ont ici encore des coefficients pairs, et devront être comptés dans la suite $\Sigma_{\rho+1}$. Quant aux termes en z', z'_1, si l'on pose

$$\begin{gathered} (9A + 6A^2)k \equiv 3AA_1 \pmod{2^\lambda}, \\ z' + kz'_1 = z'', \end{gathered}$$

ils prendront la forme

$$(9A + 6A^2)z''^2 + (9A_1 + 6A_1^2 - 4k^2)z_1'^2. \tag{35}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} 9A + 6A^2 &\equiv 9A + 6 \equiv A - 2 \pmod{8}, \\ 9A_1 + 6A_1^2 - 4k^2 &\equiv 9A_1 + 2 \equiv A_1 + 2, \end{aligned}$$

et l'on pourra, par une transformation convenable, mettre l'expression (35) sous la forme

$$(A - 2)z^2 + (A_1 + 2)z_1^2,$$

ce qui démontre notre proposition.

2° Si $\Sigma_{\rho+2}$ est de la forme (25) ou de la forme (26), on pourra supposer A et $A_1 < 4$; car on les abaisserait au besoin au-dessous de cette limite, par la transformation indiquée (n° **17**).

20. Enfin, si $\Sigma_{\lambda-1}$ est de la forme (25) ou (26), on peut admettre que A et A_1 soient égaux à l'unité; car il suffirait pour les y réduire d'effacer les multiples de 2^λ dans l'expression $2^{\lambda-1}\Sigma_{\lambda-1}$.

De même, si $\Sigma_{\lambda-2}$ est de la forme (25) ou (26), on pourra supposer A et $A_1 < 4$.

21. La détermination du nombre de solutions de la congruence

$$F = a_1 x_1^2 + \ldots + a_m x_m^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots \equiv c \pmod{2^\lambda}$$

peut maintenant se faire sans difficulté.

Ramenons cette congruence, par un changement de variables, à sa forme canonique

$$F = \Sigma 2^\rho \Sigma_\rho \equiv c \pmod{2^\lambda}. \tag{36}$$

Soit n le nombre des variables qui figurent explicitement dans la congruence transformée. On verra, comme au n° **5** :

1° Que le nombre des solutions cherchées est égal à $2^{\lambda(m-n)}Q$, Q étant le nombre des solutions de la congruence (36), où l'on ne considère plus que les variables qui y figurent explicitement;

2° Que si Σ_α est parmi les sommes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ la première qui ne s'annule pas, on aura $Q = 0$ toutes les fois que c n'est pas divisible par 2^α. Soient, au contraire, $c = 2^\alpha d$, $\lambda - \alpha = \mu$; on aura

$$Q = 2^{\alpha n} R,$$

R étant le nombre des solutions de la congruence

$$\Sigma_\alpha + 2\Sigma_{\alpha+1} + \ldots \equiv d \pmod{2^\mu}. \tag{37}$$

Cela posé, nous allons montrer que la détermination de R peut toujours se ramener à un problème analogue, mais pour un module $< 2^\mu$

22. On aura en général

$$\Sigma_\alpha = s_\alpha + \mathfrak{T},$$

s_α étant une somme de rectangles, telle que $x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p$ et $\mathfrak{T}$ se réduisant soit à zéro, soit à l'une des formes Az^2, $Az^2 + A_1 z_1^2$, $u^2 + uv + v^2$. Nous supposerons, pour plus de généralité, que p ne soit pas nul, et nous distinguerons deux espèces de solutions, suivant que l'une des variables $y_1, \ldots, y_p$ est impaire, ou qu'elles sont toutes paires.

Le nombre des systèmes de valeurs de $y_1, \ldots, y_p$ (mod. 2^μ) qui ne soient pas toutes paires à la fois est évidemment égal à $2^{\mu p} - 2^{(\mu-1)p}$. L'un quelconque de ces systèmes étant choisi, et y_1, par exemple, étant supposé impair, la congruence (37) déterminera sans difficulté la variable x_1 en fonction des $n - p - 1$ variables restantes, qui seront arbitraires et pourront être choisies chacune de 2^μ manières distinctes. Donc le nombre total des solutions de première espèce sera

$$(2^{\mu p} - 2^{(\mu-1)p})\, 2^{\mu(n-p-1)}.$$

Passons aux solutions de seconde espèce. Posons

$$y_1 = 2y'_1, \ldots, \quad y_p = 2y'_p, \quad \Sigma'_{\alpha+1} = \Sigma_{\alpha+1} + x_1 y'_1 + \ldots + x_p y'_p,$$

la congruence deviendra

$$\mathfrak{T} + 2\Sigma'_{\alpha+1} + \ldots \equiv d \pmod{2^\mu}. \tag{38}$$

Les nouvelles variables $y'_1, \ldots, y'_p$ ne doivent plus varier ici que de zéro à $2^{\mu-1} - 1$; mais, le premier membre de (38) ne changeant pas de valeur (mod. 2^μ) lorsqu'on augmente de $2^{\mu-1}$ une des quantités $y'_1, \ldots, y'_p$, il est clair qu'on pourra étendre leur champ d'excursion jusqu'à $2^\mu - 1$, pourvu que l'on divise par 2^p le nombre des solutions obtenues dans cette dernière hypothèse.

On est donc ramené à chercher le nombre Q' de solutions de la congruence (38), où toutes les variables se meuvent de zéro à $2^\mu - 1$.

23. *Premier cas :* $\mathfrak{T} = 0$. — Le nombre Q' sera nul lorsque d sera

impair. Si d est un nombre pair $2d'$, Q' sera égal (21) à $2^n R'$, R' étant le nombre des solutions de la congruence

$$(39) \qquad \Sigma'_{\alpha+1} + \Sigma_{\alpha+2} + \ldots \equiv d' \pmod{2^{\mu-1}},$$

où les variables ne se meuvent plus qu'au-dessous de $2^{\mu-1}$.

La congruence (39) est analogue à la congruence (37), mais son module est moindre. Le problème est donc réduit, comme nous l'avons annoncé (21); de telle sorte que nous pouvons passer à l'examen des autres cas.

24. *Second cas :* $\varepsilon = A z^2$. — Si d est pair, la congruence (38) ne pourra être satisfaite que si z est un nombre pair. Posons donc

$$z = 2z', \quad \Sigma'_{\alpha+2} = \Sigma_{\alpha+2} + A z'^2.$$

On aura à satisfaire à la congruence

$$2\Sigma'_{\alpha+1} + 4\Sigma'_{\alpha+2} + \ldots \equiv d \pmod{2^\mu},$$

ou, ce qui revient au même, à celle-ci

$$(40) \qquad \Sigma'_{\alpha+1} + 2\Sigma'_{\alpha+2} + \ldots \equiv \frac{d}{2} \pmod{2^{\mu-1}},$$

où la variable z' se meut au-dessous de $2^{\mu-1}$. On peut d'ailleurs faire la même supposition pour les $n-1$ autres variables, pourvu qu'on multiplie par 2^{n-1} le nombre des solutions trouvé. Cela posé, la congruence (40) ayant un module moindre que la congruence (37), le problème est encore réduit.

25. Soit, au contraire, d impair; z sera impair, et la valeur de $A z^2$ restera la même (mod. 2^μ) pour deux valeurs de z congrues entre elles suivant le module $2^{\mu-1}$. On aura donc $Q' = 2Q_\mu$, Q_μ étant le nombre des solutions que l'on aurait, en supposant que z ne variât plus qu'au-dessous de $2^{\mu-1}$, les autres variables x, y,... continuant à se mouvoir jusqu'à 2^μ.

Supposons maintenant $\mu > 3$, et posons

$$z = z' + \zeta 2^{\mu-2}, \quad x = x' + \xi 2^{\mu-1}, \quad y = y' = \eta 2^{\mu-1}, \quad d = d' + \delta 2^{\mu-1},$$

z' étant $< 2^{\mu-2}$, $x', y', \ldots, d' < 2^{\mu-1}$, et $\zeta, \xi, \eta, \ldots, \delta$ égaux à zéro ou à 1.

Si l'on suppose que $z, x, y, \ldots$ est un système de solutions de la congruence

$$(41) \qquad Az^2 + 2\Sigma'_{\alpha+1} + \ldots \equiv d \pmod{2^\mu},$$

il est clair que $z', x', y', \ldots$ satisferont à cette congruence pour le module $2^{\mu-1}$. Réciproquement, soient $z', x', y', \ldots$ un des $Q_{\mu-1}$ systèmes de solutions relatifs à ce dernier module;

$$D \equiv d \pmod{2^{\mu-1}} = d' + \delta' 2^{\mu-1}$$

la valeur correspondante du premier membre de (41) : on vérifie sans peine que $z, x, y, \ldots$ satisferont à la congruence pour le module 2^μ, quels que soient $\xi, \eta, \ldots$, si l'on détermine ζ par la relation

$$(A\zeta + \delta') \equiv \delta \pmod{2},$$

ce qui est toujours possible [*].

Chacune des $n-1$ quantités $\xi, \eta, \ldots$ étant susceptible de deux valeurs, on aura

$$Q_\mu = 2^{n-1} Q_{\mu-1} = \ldots = 2^{(n-1)(\mu-3)} Q_3.$$

26. Il ne reste donc plus qu'à calculer Q_3.

Effaçons dans la congruence (41) tous les multiples de 8, il viendra

$$Az^2 + 2\Sigma'_{\alpha+1} + 4\Sigma_{\alpha+2} \equiv d \pmod{8},$$

ou, plus simplement, z^2 étant congru à 1 (mod. 8),

$$(42) \qquad 2\Sigma'_{\alpha+1} + 4\Sigma_{\alpha+2} \equiv d - A \pmod{8}.$$

---

[*] Si μ n'était pas > 3, le terme $\zeta^2 2^{2\mu-4}$, que renferme le développement de Az^2, ne serait plus zéro (mod. 2^μ), ce qui troublerait le raisonnement.

Soit t le nombre des variables qui figurent explicitement dans cette équation; les autres variables prenant les diverses valeurs de 0 à 7, sauf z, qui varie de 0 à 3 seulement, il est clair que l'on aura

$$Q_3 = 2^{3(n-t)-1} R,$$

R étant le nombre des solutions de la congruence (42), en ne tenant plus compte des autres variables.

Cela posé, soient respectivement T_b, U_c les nombres de solutions des congruences

$$(43) \qquad \Sigma'_{\alpha+1} \equiv b \pmod{4},$$

$$(44) \qquad \Sigma_{\alpha+2} \equiv c \pmod{2},$$

il est clair que l'on aura

$$R = \sum T_b U_c,$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs de b, c (mod 8), qui satisfont à la congruence

$$(45) \qquad 2b + 4c \equiv d - A \pmod{8}.$$

Or il est aisé, pour chaque système de valeurs de b et de c, de calculer T_b, U_c.

27. Calculons d'abord T_b. Soit r le nombre des variables contenues dans $\Sigma'_{\alpha+1}$. Leur champ d'excursion est de 0 à 7; mais on peut évidemment ne les faire varier que de 0 à 3, pourvu qu'on multiplie par 2^r le nombre des solutions que nous allons trouver.

On aura, dans le cas le plus général,

$$\Sigma'_{\alpha+1} = s + \varpi,$$

s étant une somme de rectangles telle que

$$x_1 y_1 + \ldots + x_q y_q,$$

et ϖ une expression de l'une des formes

$$A_1 z_1^2, \quad A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2, \quad u^2 + uv + v^2.$$

Supposons d'abord que l'on ait simplement

$$\Sigma'_{\alpha+1} = 8.$$

Les solutions de la congruence

$$x_1 y_1 + \ldots + x_q y_q \equiv b \pmod{4}$$

sont de deux sortes : celles pour lesquelles $y_1, \ldots, y_q$ ne sont pas tous pairs, et dont le nombre sera égal à $(2^{2q} - 2^q)\, 2^{2(q-1)}$ (car les systèmes de valeurs non paires de $y_1, \ldots, y_q$ sont en nombre $2^{2q} - 2^q$, et, l'un d'eux étant donné, on pourra déterminer une des variables $x_1, \ldots, x_q$ en fonction des $q - 1$ autres qui resteront arbitraires), et celles pour lesquelles $y_1, \ldots, y_q$ sont pairs. Il n'y a aucune solution de cette seconde sorte si b est impair. Si b est pair, on posera

$$y_1 = 2y'_1, \ldots, \quad y_q = 2y'_q;$$

la congruence deviendra

$$(46) \qquad x_1 y'_1 + \ldots + x_q y'_q \equiv \frac{b}{2} \pmod{2},$$

et le nombre de ses solutions sera évidemment égal à 2^q fois le nombre des solutions qu'elle aurait en supposant que $x_1, \ldots, x_q$, de même que $y_1, \ldots, y_q$, ne variassent que de 0 à 1.

Ce dernier nombre s'obtient aisément. Si $\frac{b}{2}$ est impair, l'un des entiers $y'_1, \ldots, y'_q$ devra être impair, et l'on aura $(2^q - 1)\, 2^{q-1}$ solutions, toutes de première espèce. Si $\frac{b}{2}$ est pair, il faudra y ajouter les 2^q solutions de seconde espèce, correspondant à $y_1 \equiv \ldots \equiv y_q \pmod{2}$.

Soient, en second lieu, $s = 0$, $\tau = A_1 z_1^2$. On aura à satisfaire à la relation

$$A_1 z_1^2 \equiv b \pmod{4},$$

laquelle sera impossible si $b \equiv 2 \pmod{4}$ ou $b \equiv A_1 + 2 \pmod{4}$, et admettra deux solutions si $b \equiv 0$ ou $\equiv A_1$.

Soient maintenant $s = 0$, $\tau = A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2$. Si b est impair et

$A_1 \gtrless A_2 \pmod{4}$, on aura, en posant z_1 pair, z_2 impair, 4 solutions pour $b = A_1$; en posant z_1 impair, z_2 pair, 4 solutions pour $b = A_2$; si $A_1 \equiv A_2$, ces 8 solutions se concentreront sur cette seule valeur de b.

Si b est pair et $A_1 \gtrless A_2$, d'où $A_1 + A_2 \equiv 0$, on aura 8 solutions pour $b \equiv 0$, aucune pour $b \equiv 2$; mais si $A_1 \equiv A_2$, on aura 4 solutions pour $b \equiv 0$, 4 pour $b \equiv 2$.

Soient encore $s = 0$, $\tau = u^2 + uv + v^2$. On aura 4 solutions si $b \equiv 0$, 6 si b est impair, aucune si $b \equiv 2$.

Soit enfin $\Sigma'_{\alpha+1} = s + \tau$. La congruence

$$s + \tau \equiv b \pmod{4}$$

aura évidemment un nombre de solutions représenté par

$$\sum T'_\beta T''_\gamma,$$

T'_β, T''_γ désignant respectivement les nombres de solutions des congruences

$$s \equiv \beta, \quad \tau \equiv \gamma \pmod{4},$$

et la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs de β et de γ tels que l'on ait

$$\beta + \gamma \equiv b \pmod{4}.$$

28. Le calcul de U_c se fait comme le précédent, mais plus simplement. On aura d'abord $U_c = 2^{2s} U'_c$, s étant le nombre des variables contenues dans $\Sigma_{\alpha+2}$, et U'_c le nombre des solutions de la congruence (46) lorsqu'on ne les fait plus varier que de 0 à 1.

Si $\Sigma_{\alpha+2}$ se réduit à la forme $x_1 y_1 + \ldots + x_t y_t$, la congruence

$$\Sigma_{\alpha+2} \equiv c \pmod{2}$$

n'aura de solutions, si c est impair, qu'en supposant que $y_1, \ldots, y_q$ ne soient pas pairs à la fois. Ces solutions seront en nombre $(2^t - 1)2^{t-1}$. Si c est pair, on aura, en outre, 2^t solutions de seconde espèce à ajouter aux précédentes pour former U'_c.

Si $\Sigma_{\alpha+2} = x_1 y_1 + \ldots + x_t y_t + A z^2$ (ou $+ A z^2 + A' z'^2$), on voit,

en remarquant que $Az^2 \equiv z \pmod{2}$, que la relation (44) définit z en fonction des $s-1$ autres variables restantes, qui demeurent arbitraires. Donc $U'_c = 2^{s-1}$.

Enfin, si $\Sigma_{\alpha+2} = x_1 y_1 + \ldots + x_t y_t + u^2 + uv + v^2$, on aura

$$u^2 + uv + v^2 \equiv u + uv + v \equiv (u+1)(v+1) - 1 \pmod{2};$$

d'où, en posant $u+1 = x_{t+1}$, $v+1 = y_{t+1}$,

$$x_1 y_1 + \ldots + x_{t+1} y_{t+1} \equiv c - 1 \pmod{2},$$

congruence dont le nombre de solutions est connu par ce qui précède.

29. Il resterait à examiner les cas où $\mu = 2$ ou $\mu = 1$; mais la manière de les traiter est suffisamment indiquée par ce qui précède.

30. *Troisième cas :* $\varpi = Az^2 + A_1 z_1^2$. — Nous distinguerons plusieurs sortes de solutions, suivant que les variables z, z_1 seront paires ou impaires.

Si z_1 est pair, on posera $z_1 = 2z'_1$, z'_1 étant une nouvelle variable dont le champ d'excursion est de 0 à $2^{\mu-1} - 1$, mais peut être poussé jusqu'à $2^{\mu} - 1$, pourvu qu'on ait soin de diviser par 2 le nombre des solutions obtenues dans cette nouvelle hypothèse. Posant alors

$$\Sigma_{\alpha+2} + A_1 z_1'^2 = \Sigma'_{\alpha+2},$$

on aura à résoudre la congruence

$$Az^2 + 2\Sigma'_{\alpha+1} + 4\Sigma'_{\alpha+2} + \ldots \equiv d \pmod{2},$$

question déjà traitée (n^{os} **24** à **29**).

Si z_1 est impair, mais z pair, on posera $z = 2z'$, et l'on aura à résoudre la congruence

$$A_1 z_1^2 + 2\Sigma'_{\alpha+1} + 4(\Sigma_{\alpha+2} + Az^2) + \ldots \equiv d \pmod{2},$$

où z_1 est supposé impair; question déjà traitée (n^{os} **24** à **29**).

Soient enfin z et z_1 impairs. Si $\mu > 3$, on ramènera, comme au n° **25**, la question au cas où $\mu = 3$, et la congruence

$$Az^2 + A_1 z_1^2 + 2\Sigma'_{\alpha+1} + 4\Sigma_{\alpha+2} \equiv d \pmod{8}$$

se réduit, en remarquant que $z^2 \equiv z_1^2 \equiv 1$, à

$$2\Sigma'_{\alpha+1} + 4\Sigma_{\alpha+2} \equiv d - A - A_1 \pmod{8},$$

congruence analogue à celle déjà traitée au n° **26**.

Nous passons ici encore sur les cas où $\mu < 3$, car ils sont implicitement résolus par ce qui précède.

31. *Quatrième cas :* $\mathfrak{E} = u^2 + uv + v^2$. — Supposons d'abord d impair; l'une au moins des quantités u, v sera impaire. Soient dans ce cas u, v, x, y,... les variables contenues dans la congruence donnée

$$(47) \qquad u^2 + uv + v^2 + 2\Sigma_{\alpha+1} + \ldots \equiv d \pmod{2^\mu}.$$

Posons

$$u = u' + u_1 2^{\mu-1}, \quad v = v' + v_1 2^{\mu-1}, \quad x = x' + x_1 2^{\mu-1}, \ldots, \quad d = d' + d_1 2^{\mu-1}$$

u', v', x',..., d' étant $< 2^{\mu-1}$, et u_1, v_1, x_1,..., d_1 étant égaux à 0 ou à 1. Si u, v, x,... est un système de solutions pour la congruence (47), il est clair que u', v', x'.... satisferont à la même congruence relativement au module $2^{\mu-1}$. Réciproquement, soient u', v', x',... un système de solutions pour le module $2^{\mu-1}$; on aura

$$u'^2 + u'v' + v'^2 + \ldots \equiv d \pmod{2^{\mu-1}} \equiv d + \delta 2^{\mu-1} \pmod{2^\mu},$$

et u, v, x,... sera un système de solutions de la congruence pour le module 2^μ, si l'on a

$$u'v_1 + v'u_1 \equiv \delta \pmod{2},$$

relation qui pourra toujours servir à déterminer l'un des entiers v_1 ou u_1, car u' ou v' est impair. Tous les entiers de la suite u_1, v_1, x_1,...

sauf celui dont il s'agit, pourront être pris à volonté égaux à 0 ou à 1. Donc, si l'on désigne par t le nombre des variables de la congruence (47), par Q_μ le nombre de ses solutions pour le module 2^μ, on aura

$$Q_\mu = 2^{t-1} Q_{\mu-1} = 2^{(t-1)(\mu-1)} Q_1.$$

Or, si $\mu = 1$, la congruence (47) se réduit à

$$u^2 + uv + v^2 \equiv d \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2},$$

et l'on aura ses solutions en posant $u = 1$ et $v = 0$ ou 1, ou $u = 0$, $v = 1$, avec $x, y, \ldots$ arbitraires, soit $3 . 2^{t-2}$ solutions. Donc $Q_1 = 3 . 2^{t-2}$.

32. Supposons maintenant d pair; u et v devront être pairs. Posons donc

$$u = 2u', \quad v = 2v', \quad \Sigma_{\alpha+2} + u'^2 + u'v' + v'^2 = \Sigma'_{\alpha+2};$$

on aura à résoudre la congruence

$$2\Sigma_{\alpha+1} + 4\Sigma'_{\alpha+2} + \ldots \equiv d \pmod{2^\mu},$$

ou

$$\Sigma_{\alpha+1} + 2\Sigma'_{\alpha+2} + \ldots \equiv \frac{d}{2} \pmod{2^{\mu-1}}.$$

Dans cette congruence, les $t - 2$ variables autres que u', v' se meuvent de 0 à $2^\mu - 1$; mais on peut borner leur champ d'excursion à $2^{\mu-1} - 1$, pourvu qu'on multiplie par 2^{t-2} le nombre R des solutions trouvées dans cette dernière hypothèse.

Il ne reste donc plus qu'à trouver R, nombre des solutions d'une congruence prise suivant le module $2^{\mu-1}$. Donc le problème, ici encore, se trouve réduit.

33. Comme exemple numérique, cherchons le nombre des solutions de la congruence

$$23x^2 + 21xy + 2y^2 + zy + 5zx + z^2 + 2x_1y_1 + 4x_1v$$
$$+ 2uz + 5u^2 + 12uv + 4v^2 \equiv 12 \pmod{32}.$$

Il faut commencer par la ramener à sa forme canonique. Pour cela,

remarquons que le coefficient de xy est impair, et celui de y^2 pair. En remplaçant y par $y + \alpha x$, le coefficient de x^2 deviendra

$$A = 23 + 21\alpha + 2\alpha^2,$$

et l'on pourra le rendre congru à zéro (mod. 32). A cet effet, on se rappellera la remarque faite plus haut que si, pour une certaine valeur α_i de α, on a $A = 2^\rho i$, i étant impair, A sera pour $\alpha_0 + 2^\rho$ de la forme $2^\sigma i$, σ étant $> \rho$.

On posera donc successivement

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0, & \text{d'où} & A = i; \\ \alpha = 1, & \text{d'où} & A = 46 = 2i; \\ \alpha = 1 + 2 = 3, & \text{d'où} & A = 104 = 8i; \\ \alpha = 3 + 8 = 11, & \text{d'où} & A = 16i; \\ \alpha = 11 + 16 = 27 \equiv -5 \pmod{32}. & & \end{array}$$

Remplaçant donc y par $y - 5x$ dans la congruence donnée, elle deviendra

$$xy + 2y^2 + zy + z^2 + 2x_1y_1 + \ldots \equiv 12 \pmod{32},$$

ou, en remplaçant x par $x - 2y - z$,

$$xy + z^2 + 2x_1y_1 + 4x_1v + 2uz + 5u^2 + 12uv + 4v^2 \equiv 12 \pmod{32}.$$

Les variables x, y sont déjà isolées. On isolera la variable z, dont les rectangles ont des coefficients pairs et le carré un coefficient impair, en la remplaçant par $z - u$; la congruence devient

$$xy + z^2 + 2x_1y_1 + 4x_1v + 4u^2 + 12uv + 4v^2 \equiv 12 \pmod{32},$$

et, en remplaçant y_1 par $y_1 - v$, en remarquant, d'autre part, que les termes $4u^2 + 12uv + 4v^2$ peuvent être ramenés à la forme $4(u^2 + uv + v^2)$ par une transformation opérée sur les indices u et v (n° **15**), transformation dont il nous suffit d'avoir le résultat sans avoir besoin de l'effectuer, on ramènera la congruence à sa forme canonique

$$(48) \quad xy + z^2 + 2x_1y_1 + 4(u^2 + uv + v^2) \equiv 12 \pmod{32}.$$

54. Cherchons maintenant le nombre N de ses solutions.

Si y est impair, $z, x_1, \ldots$ seront arbitraires et x déterminé, ce qui donne 16.32^5 solutions de première espèce.

Pour avoir les solutions de seconde espèce, on devra changer y en $2y$, et leur nombre sera $\frac{1}{2}N_1$, N_1 étant le nombre des solutions de la congruence

$$(49) \quad z^2 + 2(x_1y_1 + xy) + 4(u^2 + uv + v^2) \equiv 12 \pmod{32}.$$

Or z est nécessairement pair; changeons-le en $2z$; on aura $N_1 = 2^6 N_2$, N_2 étant le nombre des solutions de la congruence

$$(50) \quad x_1y_1 + xy + 2(u^2 + uv + v^2 + z^2) \equiv 6 \pmod{16}.$$

Cette nouvelle congruence ne satisfait plus aux conditions imposées à nos formes canoniques; mais nous pourrons, par des transformations d'indices (qu'il est inutile d'effectuer pour notre objet actuel), transformer $u^2 + uv + v^2 + z^2$ en

$$(1 + 4 + 4 + 4)z'^2 + Au'^2 + Bu'v' + Cv'^2,$$

A et C étant pairs et B impair (n° **11**); puis remplacer ces trois derniers termes eux-mêmes par le produit de deux nouvelles variables x_2, y_2 (n° **8**); enfin supprimer les multiples de 8 dans le coefficient de z'^2 (n° **16**), ce qui réduira la congruence (50) à la forme

$$x_1y_1 + xy + 2(x_2y_2 + 5z'^2) \equiv 6 \pmod{16}.$$

Cette congruence a $(16^2 - 8^2)16^4$ solutions de première espèce (y, y_1 non pairs à la fois), et $2^5 N_3$ solutions de seconde espèce, N_3 étant le nombre des solutions de la congruence

$$xy + x_1y_1 + x_2y_2 + 5z'^2 \equiv 3 \pmod{8}.$$

Or cette congruence, n'ayant de solutions que si y, y_1, y_2 ne sont pas tous pairs, en aura en tout $(8^3 - 4^3)8^3$.

Récapitulant ces résultats, on aura

$$N = 16.32^5 + 2^5[(16^2 - 8^2)16^4 + 2^5(8^3 - 4^3)8^3] = 35.2^{25}.$$

Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand;

PAR M. A. MANNHEIM.

Dans une *Note sur la théorie des normales à une même surface* [*], M. Bertrand généralise une proposition, qui lui est due, en établissant une relation entre les positions de deux normales à une surface menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux tracés sur cette surface à partir d'un point.

Je me propose aujourd'hui de montrer comment on arrive à cette relation en faisant usage du mode de représentation des normalies que j'ai fait connaître dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites* [**].

Soient o (*fig.* 1) le point de la surface à partir duquel on trace les directrices de deux normalies, θ l'angle de ces directrices, G la normale à la surface au point o, f_1, f_2 les centres de courbure principaux de la surface situés sur G.

La droite auxiliaire $f'_1 f'_2$ d'une normalie étant telle que l'angle $f'_2 o f'_1$ est droit, l'enveloppe des droites auxiliaires de toutes les normalies autour de o est une conique dont G est un des axes, dont f_1, f_2 sont les sommets, et dont le point o est un des foyers.

Supposons que $f'_1 f'_2$ et $f''_1 f''_2$ soient les deux droites auxiliaires correspondant aux deux normalies dont les directrices comprennent entre elles l'angle θ. Je prends, par rapport à G, la droite hj symétrique

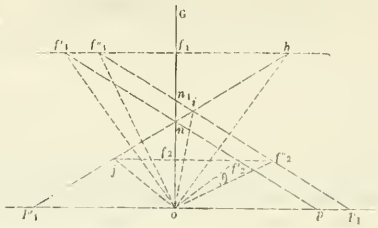
[*] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XII, p. 343.

[**] *Id.*, 2e série, t. XVII, p. 109.

de $f'_1 f'_2$: cette droite, les deux droites auxiliaires et $f_1 f'_1$, $f_2 f'_2$ sont des tangentes à la conique dont je viens de parler.

On sait que l'angle, sous lequel on voit du foyer d'une conique les segments interceptés sur des tangentes quelconques de cette courbe par deux tangentes fixes, est constant. D'après cela, l'angle $f''_2 o f'_2$ est

Fig. 1.



égal à l'angle ion; mais le premier de ces angles indique sur la figure l'angle que comprennent entre elles les directrices des normalies dont les droites auxiliaires sont $f'_1 f''_2$, $f''_1 f''_2$. Nous voyons ainsi que l'angle ion est égal à θ.

Les côtés de l'angle $p'_1 i p_1$ déterminent sur les deux transversales op_1, on_1 des segments entre lesquels on a la relation

$$\left(\frac{1}{on} - \frac{1}{on_1}\right)\frac{1}{\sin ion} = \left(\frac{1}{op_1} + \frac{1}{op'_1}\right)\frac{1}{\sin p_1 oi};$$

mais $op'_1 = op$; on a donc

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\dfrac{1}{on} - \dfrac{1}{on_1}}{\dfrac{1}{op} + \dfrac{1}{op_1}}.$$

Si nous supposons que les directrices sont des courbes géodésiques : on, on_1 sont les rayons de première courbure, et op, op_1 les rayons de seconde courbure de ces directrices.

On peut alors écrire cette relation ainsi :

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{\psi}{ds} - \frac{\psi'}{ds}}{\frac{\varphi}{ds} + \frac{\varphi'}{ds}},$$

en introduisant les angles de contingence de ces courbes et les angles que comprennent entre eux les plans osculateurs infiniment voisins.

Supprimons dans cette formule le facteur ds, il vient

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\psi - \psi'}{\varphi + \varphi'},$$

qui est la relation que l'on doit à M. Bertrand.

Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes;

PAR M. A. MANNHEIM.

« Sur la surface gauche formée par l'ensemble des rayons de cour-
» bure d'une courbe donnée, peut-on tracer une seconde courbe dont
» les génératrices de la surface soient aussi des rayons de courbure? »

Cette question fut proposée aux géomètres par M. de Saint-Venant dans son *Mémoire sur les lignes courbes non planes* [*].

M. Bertrand y a répondu le premier [**], en donnant la relation qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales de cette courbe soient en même temps normales principales d'une autre courbe.

Dans le travail actuel, j'établis très-simplement et géométriquement la relation due à M. Bertrand, en faisant usage de la *droite auxiliaire* dont j'ai donné la construction et les propriétés dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies* [***].

En outre, après avoir démontré une propriété de la surface gauche dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes, j'étends à cette surface toutes les propriétés dont jouit un pinceau quelconque de droites.

J'arrive ainsi à des résultats nouveaux qui ne rappellent à l'esprit rien d'analogue : c'est que la marche suivie pour les obtenir n'est elle-même analogue en rien aux procédés jusqu'ici employés pour la démonstration des vérités géométriques.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 30e cahier.

[**] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 332.

[***] *Id.*, 2e série, t. XVII, p. 109.

Désignons par (o) une courbe gauche, par o un point de cette courbe, par G la normale principale en ce point et par (G) la surface gauche formée par les normales principales de (o).

La courbe (o) est une trajectoire orthogonale des génératrices de (G), et, comme son plan osculateur au point quelconque o est tangent à (G), nous voyons que :

Théorème I. — *Une courbe quelconque est une ligne asymptotique qui rencontre à angle droit les génératrices de la surface formée par ses normales principales.*

Réciproquement :

Théorème II. — *Lorsque la trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface gauche* (G) *est une ligne asymptotique de cette surface, elle a pour normales principales les génératrices de* (G).

La question posée par M. de Saint-Venant équivaut donc à celle-ci :

Problème I. — *Dans quel cas peut-on tracer sur une surface gauche deux lignes asymptotiques, trajectoires orthogonales des génératrices de cette surface?*

Je dis d'abord que :

Théorème III. — *S'il y a plus de deux lignes asymptotiques d'une surface gauche qui rencontrent à angle droit une génératrice de cette surface, il y en a une infinité.*

Appelons toujours (G) la surface gauche et G une génératrice de cette surface. Les asymptotes des indicatrices de (G) pour les différents points de G appartiennent à un hyperboloïde : hyperboloïde osculateur de (G) le long de G. Sur cet hyperboloïde il n'y a que deux génératrices de l'un des systèmes qui rencontrent à angle droit une génératrice de l'autre système.

On voit ainsi que, généralement, il y a deux lignes asymptotiques de (G) qui rencontrent G à angle droit.

S'il y en a plus de deux, c'est que, au lieu d'un hyperboloïde osculateur, il y a un paraboloïde osculateur, et alors toutes les lignes asymptotiques de la surface gauche rencontrent G à angle droit.

Revenons maintenant à la question précédemment posée et d'abord modifions-en l'énoncé.

Menons par les différents points d'une courbe (o) des plans respectivement perpendiculaires aux normales principales de cette courbe. Ces plans enveloppent une surface développable (T) qui est la surface rectifiante de (o).

Les plans osculateurs de (o) étant normaux à cette développable, la courbe (o) est une ligne géodésique de la surface (T). Ainsi :

Théorème IV. — *La surface* (G), *lieu des normales principales d'une courbe* (o), *est, relativement à la surface rectifiante de cette courbe, une normalie dont la directrice est une géodésique de cette surface rectifiante.*

Réciproquement :

Théorème V. — *Si l'on prend une géodésique pour directrice d'une normalie à une surface, cette courbe est une asymptotique de cette normalie.*

Toute surface parallèle à (T) coupera cette normalie suivant une trajectoire orthogonale des génératrices de cette surface; et, pour que cette ligne soit une asymptotique de cette normalie, il faut qu'elle soit une géodésique de la surface parallèle qui la détermine.

Notre question revient donc à celle-ci :

Problème II. — *Étant données une surface développable* (T) *et une normalie à cette surface dont la directrice est une géodésique* (o) *de* (T), *dans quel cas pourra-t-on déterminer une surface* (T′) *parallèle à* (T) *qui soit coupée aussi par cette normalie suivant une géodésique?*

Appelons (a) la courbe d'intersection de (T′) et de la normalie, et supposons que cette courbe soit une géodésique sur (T′). Alors la transformée de cette courbe après le développement de (T′) sera une ligne droite. (T) et (T′), étant des surfaces parallèles, ont leurs génératrices parallèles entre elles. Après le développement de ces surfaces, ces génératrices parallèles deviennent les tangentes aux transformées des arêtes de rebroussement de (T) et (T′), et toutes ces tangentes peuvent être placées de manière à être respectivement parallèles entre elles. Ces tangentes, ainsi correspondantes, sont coupées par les droites transformées de (o) et de (a) sous des angles dont la différence est égale à l'angle que ces droites font entre elles. Par suite, les courbes (o) et (a) elles-mêmes rencontrent les génératrices de (T) et (T′)

sous des angles dont la différence est constante, ou, ce qui revient au même, aux points o et a, où les courbes (o) et (a) rencontrent une même génératrice de la normalie, les tangentes à ces courbes comprennent entre elles un angle qui est le même, quelle que soit la génératrice considérée.

Mais cet angle mesure l'angle que font entre eux les plans tangents en o et a à la normalie, et, comme ces plans tangents ne sont autres que les plans osculateurs des courbes (o) et (a), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Lorsque deux courbes admettent les mêmes normales principales, les plans osculateurs de ces courbes aux points où elles rencontrent une même normale font entre eux un angle qui est le même, quelle que soit cette normale* [*].

Reprenons les courbes (o) et (a) ayant les mêmes normales principales. Appelons toujours (G) la surface formée par ces normales, G une génératrice de cette surface, o et a les points de rencontre de cette droite avec les deux courbes (o) et (a), G′ une autre génératrice de (G), i et j les points de rencontre de cette droite avec les courbes (o) et (a). Nous savons que (G) est, par rapport à (T), une normalie dont la directrice est une géodésique de (T).

Amenons la génératrice G′ en coïncidence avec G, le point i venant en o, et le plan tangent en i à (G) coïncidant avec le plan tangent en o à cette même surface. Alors le point j vient en a et le plan tangent en j coïncide avec le plan tangent en a.

Amenons ainsi en coïncidence avec G toutes les génératrices de (G), et entraînons en même temps que ces génératrices, et avec chacune de ces droites, un élément infiniment petit de la surface (G).

Ces éléments infiniment petits, réunis de cette façon, constituent les *surfaces élémentaires* d'un pinceau dont G est un rayon, o et a les *foyers* de ce rayon, et dont les plans tangents en ces points sont les *plans focaux*.

---

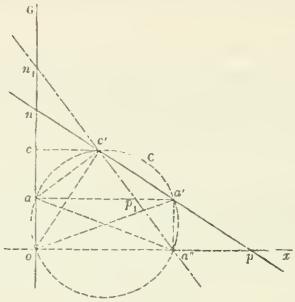
[*] Voir *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, par P. Serret, p. 109, et *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. I, p. 223.

Étudions ce pinceau au moyen des droites auxiliaires relatives à ces surfaces élémentaires.

Prenons o pour origine, et traçons sur un plan quelconque mené par G la droite auxiliaire de l'une des surfaces élémentaires.

Pour cela, élevons dans ce plan la perpendiculaire aa' à G (*fig.* 1); menons du point o la droite oa' faisant avec la perpendiculaire ox à G

Fig. 1.



l'angle α, que les plans tangents en o et a font entre eux : une droite np, qui contient a', peut être considérée comme la droite auxiliaire d'une des surfaces élémentaires du pinceau.

Si, par exemple, cette surface élémentaire provient de l'élément infiniment petit de (G) le long de G', alors on est le rayon de première courbure ρ de (o) pour le point de rencontre i de G' et de (o), op est le rayon de seconde courbure r de (o) pour le même point i.

Le pied c' de la perpendiculaire oc' abaissée de o sur np se projette sur G au point c : ce point c est ce que devient le point central de (G) sur G' lorsque G' coïncide avec G. Enfin l'inclinaison de oc' sur ox est l'angle φ que le plan central pour la génératrice G' fait avec le plan tangent en i à (G).

Les triangles pon et $a'an$ sont semblables; ils donnent

$$\frac{op}{on} = \frac{aa'}{an}$$

ou, en désignant simplement par a la distance focale oa,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{\rho - a},$$

que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{r} + \frac{a}{\rho} = 1.$$

Telle est la relation qui existe entre les rayons de courbure de (o), dont les normales principales sont les normales principales d'une autre courbe (a).

La relation (1) peut s'écrire

$$\rho = a + \frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}\frac{\rho}{r};$$

mais $\frac{r}{\rho}$ est égal, comme on le voit sur la figure, à la tangente de l'angle φ, et, comme le plan central contient la génératrice de la développable (T), φ est l'angle que fait avec cette génératrice la tangente à la courbe (o). La dernière relation, que l'on peut écrire

$$\rho = a + \frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}\cot\varphi,$$

établit donc la liaison qui existe entre les rayons de courbure d'une géodésique tracée sur une développable et les angles sous lesquels cette courbe rencontre les génératrices de cette surface lorsque les normales principales de cette courbe sont les normales principales d'une autre courbe.

Nous avons dit que on et op étaient le rayon de première et de seconde courbure de (o); il est facile de construire les rayons de courbure de (a). Il suffit, pour cela, de construire la droite auxiliaire de la surface élémentaire considérée précédemment en prenant le point a pour origine : on élève au point c' une perpendiculaire à la droite ac'. On obtient ainsi la nouvelle droite auxiliaire $n_1 p_1$. Le segment an_1 est le rayon de première courbure ρ_1 de la courbe (a), et le segment ap_1 est le rayon de seconde courbure de la même courbe.

Problème III. — *Cherchons maintenant quelles relations il y a entre les rayons de courbure des courbes* (o) *et* (a) *qui ont les mêmes normales principales.*

Prolongeons la droite $n_1 p_1$ jusqu'au point a'' où elle rencontre ox : la droite $a'a''$ est perpendiculaire à ox; les triangles $ap_1 a''$ et $oa'p$ sont semblables. Ils donnent

$$\frac{ap_1}{aa''} = \frac{oa'}{op} \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{\dfrac{a}{\sin\alpha}} = \frac{\dfrac{a}{\sin\alpha}}{r},$$

que l'on peut écrire

$$(2) \qquad rr_1 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}.$$

Telle est la relation fort simple qui existe entre les rayons de seconde courbure des courbes (o) et (a).

On peut énoncer ainsi ce résultat :

Théorème VII. — *Le produit des rayons de seconde courbure de deux courbes qui ont les mêmes normales principales pour les points situés sur une même normale est constant, quelle que soit cette normale.*

La figure que nous employons peut s'appliquer à un élément quelconque de (G). Quel que soit cet élément, la droite auxiliaire correspondante, en prenant le point o pour origine, sera une droite passant par le point a'.

Il résulte de là que les points tels que c' appartiennent à la circonférence C qui passe par les points o, a, a', a''.

Les droites auxiliaires relatives au même élément infiniment petit de (G), lorsqu'on prend le point o ou le point a pour origine, passent toujours par le point a' ou par le point a'', et elles se coupent sur la circonférence C.

On aura donc pour les différents éléments de (G) des droites telles que $c'a'$, $c'a''$, qui, jointes aux deux droites $c'a$, $c'o$, formeront un faisceau de quatre droites donnant toujours lieu au même rapport anharmonique.

Les droites de ce faisceau coupent G aux quatre points o, a, n, n_1

donnant lieu à un rapport anharmonique qui sera alors aussi le même pour les différentes génératrices de (G); mais n et n_1 sont des centres de courbure de (o) et de (a). Nous pouvons donc dire :

THÉORÈME VIII. — *Les points où deux courbes ayant les mêmes normales principales rencontrent une de leurs normales et les centres de courbure de ces courbes situés sur cette normale déterminent quatre points dont le rapport anharmonique est constant, quelle que soit la normale considérée.*

Ce théorème exprime sous une forme particulière la relation qui existe entre les rayons de première courbure ρ et ρ_1 des courbes (o) et (a). Nous allons établir directement cette relation.

Nous avons trouvé

$$\frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{r} + \frac{a}{\rho} = 1;$$

d'où

$$\frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{r} = 1 - \frac{a}{\rho}.$$

On a de même pour la courbe (a)

$$\frac{\frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}}{r_1} = 1 + \frac{a}{\rho_1}.$$

En faisant le produit membre à membre de ces deux relations, il vient

$$\frac{\frac{a^2}{\operatorname{tang}^2\alpha}}{rr_1} = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\left(1 + \frac{a}{\rho_1}\right).$$

Remplaçant rr_1 par sa valeur $\frac{a^2}{\sin^2\alpha}$, on a

$$(3) \qquad \cos^2\alpha = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\left(1 + \frac{a}{\rho_1}\right).$$

Les relations (2) et (3) obtenues directement sur notre figure sont

beaucoup plus simples que celles qui avaient été données jusqu'à présent.

La même figure, qui va nous conduire encore à de nombreux résultats, permet d'établir aussi, comme je vais le montrer, une relation qui se trouve dans le Mémoire, déjà cité, de M. Bertrand.

Deux génératrices infiniment voisines G et G_1 de la surface (G) déterminent sur les courbes (o) et (a) des arcs infiniment petits ds, ds_1, qui sont entre eux dans le rapport de oc' à ac' [*].

Mais on voit sur la figure que

$$\frac{1}{oc'^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{1}{ac'^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2};$$

on a donc la relation

$$\frac{ds}{ds_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{r_1^2}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}},$$

qu'il s'agit d'établir.

Reprenons le pinceau dont les surfaces élémentaires ont été obtenues en réunissant toutes les génératrices de (G), ainsi que les éléments infiniment petits le long de ces génératrices.

Les propriétés de la surface (G) vont se déduire immédiatement des propriétés de ce pinceau. Pour les énoncer plus facilement, j'appellerai *projection* d'un point de cette surface sur une génératrice G le point de rencontre avec cette droite de la courbe partant du point et qui coupe orthogonalement les génératrices de (G).

Les théorèmes VII, VIII, IX, X, etc., de mon *Mémoire sur les pinceaux* nous donnent les théorèmes suivants, qui sont entièrement nouveaux :

Théorème IX. — *La surface* (G), *lieu des normales principales de deux courbes* (o), (a), *est telle que ses points centraux pour ses diffé-*

---

[*] *Voir*, dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites*, la note au bas de la page 148.

rentes génératrices se projettent sur un segment déterminé d'une quelconque de ses génératrices.

Les extrémités de ce segment sont les projections des points centraux, que j'appellerai *points limites*. J'appellerai aussi *distance centrale* la distance d'un point central à la courbe (o).

Cette distance centrale acquiert ses valeurs extrêmes aux points limites.

Théorème X. — *La distance comprise sur une même normale entre les points a et o des courbes (a) et (o) est égale à la différence des distances centrales des points limites multipliés par le sinus de l'angle que font entre eux les plans osculateurs de (a) et (o) aux points a et o.*

Théorème XI. — *Si, dans un plan passant par* G, *on porte, sur des perpendiculaires à cette droite élevées des projections des points centraux de* (G) *et à partir de ces points, des longueurs égales aux paramètres de distribution de* (G) *qui correspondent respectivement à ces points centraux, les extrémités des longueurs ainsi portées sont sur une circonférence de cercle.*

Théorème XII. — *Aux points limites de la surface* (G) *les plans centraux font avec la courbe* (o) *des angles dont la différence est égale à un angle droit.*

Ces plans centraux aux points limites, je les appellerai *plans principaux*.

Prenons l'angle que le plan central en un point central quelconque de (G) fait avec la courbe (o), l'angle analogue pour l'un des plans principaux, et désignons par ω la différence de ces angles.

Désignons par l la *distance centrale* pour le point central que nous considérons, par l_1 et l_2 les distances centrales des *points limites*.

On a

$$l_1 \cos^2 \omega + l_2 \sin^2 \omega = l.$$

Cette relation peut être considérée comme une équation de la ligne de striction de (G) écrite dans un système particulier de coordonnées.

Si nous disons que ω est l'inclinaison d'un plan central sur l'un des plans principaux, alors les coordonnées employées dans l'équation

précédente sont la distance centrale pour un point central et l'inclinaison sur l'un des plans principaux du plan central correspondant.

Théorème XIII. — *Lorsque deux points de la ligne de striction de* (G) *ont même distance centrale, les plans centraux qui correspondent à ces points sont également inclinés sur les plans principaux.*

Théorème XIV. — *Le produit des paramètres de distribution de* (G) *relatif aux deux génératrices de cette surface pour lesquelles les points centraux ont même distance centrale est égal au produit des distances de l'un de ces points centraux aux courbes* (a), (o).

Théorème XV. — *Les génératrices de* (G) *pour lesquelles cette surface a même paramètre de distribution ont leurs points centraux respectivement à la même distance des courbes* (a), (o).

Appelons k le paramètre de distribution de (G) pour une génératrice quelconque G, k_1, k_2 les valeurs extrêmes de k, et ψ l'excès de l'angle que le plan central pour G fait avec le plan tangent en o sur l'angle que le plan central relatif à la génératrice dont le paramètre de distribution est maximum fait avec le même plan tangent.

On a

$$k = k_1 \cos^2\psi + k_2 \sin^2\psi.$$

A partir d'un point quelconque b de G, traçons la trajectoire orthogonale (b) des génératrices de (G).

Soit h le point de G pour lequel le plan tangent en ce point à (G) fait avec le plan tangent en b un angle β.

Désignons par h la distance hb du point h à la courbe (b); sur chaque génératrice de G, il y a un point tel que h. On a la relation

$$\frac{1}{h} = \frac{\cos^2\left(\alpha + \frac{\frac{\pi}{2} - \beta}{2}\right)}{h_1} + \frac{\sin^2\left(\alpha + \frac{\frac{\pi}{2} - \beta}{2}\right)}{h_2},$$

dans laquelle β est un angle constant, h_1, h_2 sont les valeurs extrêmes de h, et α l'inclinaison du plan tangent en b sur l'un des plans principaux, inclinaison comptée comme nous l'avons dit précédemment.

Dans le cas particulier où l'angle β est droit, on a simplement

$$\frac{1}{h} = \frac{\cos^2\alpha}{h_1} + \frac{\sin^2\alpha}{h_2}.$$

On peut remarquer que h est pour le point b le rayon de courbure géodésique de la courbe (b) qui est tracée sur (G).

Enfin on a le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *On prend, sur une trajectoire orthogonale* (b) *des génératrices de* (G), *deux points* b_1, b_2, *tels que les plans tangents en ces points fassent avec l'un des plans principaux des angles dont la différence soit égale à un droit. On parcourt sur* (b), *à partir de ces points, des arcs infiniment petits de même longueur; les plans tangents en* b_1 *et* b_2 *à* (G) *tournent alors respectivement d'un certain angle : la somme de ces angles est constante, quelle que soit la position des points* b_1, b_2 *sur* (b).

Si l'on se reporte aux démonstrations que j'ai données des propriétés d'un pinceau quelconque, on aura, par cela même, les démonstrations des théorèmes précédents.

Remarquons en terminant que la Géométrie, à propos d'un sujet déjà souvent étudié, m'a permis d'énoncer un grand nombre de théorèmes absolument nouveaux, et qu'elle indique aussi les éléments que l'on doit considérer dans l'étude des surfaces réglées ainsi que les systèmes de coordonnées qu'il serait avantageux d'introduire.

Sur la publication d'un cours de Physique mathématique professé à Paris en 1867 *et* 1868;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

L'Ouvrage que je publie en ce moment a en vue les méthodes d'intégration en Physique mathématique, et je me propose d'indiquer en quelques mots en quoi il consiste.

Les intégrations des équations aux différences partielles de la Physique présentent un caractère particulier qui les distingue des intégrations que l'on rencontre dans les autres branches des Mathématiques. En général, les fonctions que l'on y cherche satisfont non-seulement à ces équations dans l'intérieur d'une surface, mais elles satisfont, de plus, sur cette surface à de certaines équations que l'on appelle les *conditions aux limites*.

Il y a bien une partie de la Mécanique, l'Hydrodynamique, à laquelle se rapporterait ce genre d'intégration; mais presque toutes les questions de cette théorie sont tellement compliquées, qu'il est presque impossible de les résoudre complétement par une analyse rigoureuse.

Après avoir bien précisé la forme analytique d'un problème de Physique mathématique, il est évident que l'on pourrait à ce problème substituer une question d'analyse pure; mais il convient de remarquer qu'on lui ôterait par là presque toujours de son intérêt et de sa clarté : c'est ce que nous ferons facilement comprendre par des exemples. Prenons d'abord le problème de la corde vibrante. On peut intégrer son équation par les fonctions arbitraires, comme le fit d'abord d'Alembert; alors, si l'on se reporte à la question physique, il est évident qu'on ne pourra déterminer les deux fonctions arbitraires qu'en se donnant le déplacement et la vitesse de chaque point de la

corde à l'instant initial; enfin on comprend que ces deux conditions ne sont pas encore suffisantes pour la détermination complète de ces fonctions, et qu'il est nécessaire de se servir de la fixité des extrémités de la corde. Il y a aussi de ce problème une autre solution, et qui rend bien mieux compte du phénomène étudié : c'est la solution exprimée par la série trigonométrique de Daniel Bernoulli. En effet, le premier terme de cette série donne le son fondamental rendu par la corde, et les termes suivants donnent les différents harmoniques qui l'accompagnent.

Comme second exemple, prenons une des questions les plus simples de la théorie de la chaleur, et imaginons qu'on veuille trouver la température d'équilibre d'un corps dont on entretient les différents points de la surface à des températures données. Il est tout de suite évident que le problème est entièrement déterminé. Si l'on observe que la température et que les flux de chaleur à l'intérieur du corps sont des fonctions continues, ce problème revient à cette question d'analyse : On demande une fonction V qui soit continue dans l'intérieur d'une surface, ainsi que ses dérivées du premier ordre, qui satisfasse à l'équation aux différences partielles $\Delta V = 0$ dans l'intérieur de cette surface, et qui ait sur cette surface même des valeurs données. Mais alors ce n'est plus que par une analyse difficile que l'on reconnaît que le problème est entièrement déterminé.

Voici encore un point que je tiens à faire remarquer :

Presque tous les problèmes de Physique mathématique se résolvent à l'aide de séries, et chacune de ces solutions donne, en général, une formule pour la représentation des fonctions arbitraires d'une, de deux ou de trois variables au moyen d'une série qui est convergente dans des limites indiquées par la question. Ainsi, par exemple, la formule du mouvement vibratoire d'une membrane d'une forme déterminée donne immédiatement la représentation d'une fonction arbitraire de deux variables par une série double qui est convergente dans l'étendue marquée par les limites de la membrane.

Parmi toutes ces séries, les géomètres qui se livrent surtout aux Mathématiques pures n'ont considéré que les séries de sinus et de cosinus qui procèdent suivant des arcs multiples, et la série des Y_n de Laplace; mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que ces séries

ne correspondent qu'à un premier pas fait dans la Physique mathématique, et les démonstrations que l'on a données pour prouver que ces séries peuvent représenter une fonction donnée arbitrairement et sont convergentes ne sont pas susceptibles d'être étendues aux séries dont nous parlons.

Les premières recherches d'intégration en Physique mathématique ont été faites pour la corde vibrante, dont la théorie a été étudiée par d'Alembert, Euler, Taylor, Daniel Bernoulli et Lagrange. Les recherches que l'on doit citer ensuite sont celles de Laplace sur l'attraction des sphéroïdes; puis viennent les travaux de Poisson et de Fourier : la plupart des résultats obtenus par Fourier ont été réunis par lui dans sa *Théorie analytique de la chaleur*. Enfin nous mentionnerons les ouvrages remarquables publiés par Lamé dans ces vingt dernières années.

J'ai voulu, dans mon Traité, revenir sur les premières questions étudiées; car non-seulement Lamé a laissé entièrement de côté l'historique dans ses livres, mais il n'y a pas remis en lumière tous les résultats de ses prédécesseurs.

J'ai exposé la substance principale du livre que je publie dans un Cours complémentaire de la Sorbonne; mais, en publiant ce Cours, j'ai dû y faire des additions et des modifications qui l'ont considérablement amélioré. Je vais indiquer d'une manière très-succincte la matière de chaque Chapitre.

Le Chapitre I renferme la théorie de la corde vibrante et les premières recherches de Fourier sur la théorie de la chaleur.

Le Chapitre II traite des surfaces isothermes et des coordonnées curvilignes; j'y ai mis sur ces théories de Lamé tout ce qui était nécessaire à mon sujet. Ce Chapitre se termine par un article que j'ai publié autrefois sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires.

Le Chapitre III se rapporte à l'équilibre de température des cylindres; cette question a été traitée par Lamé, mais elle exigeait des améliorations. Je montre, comme je l'ai déjà fait dans ce *Journal* (t. XIV, 1869) [*], que les équations aux différences partielles de la

---

[*] *Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans les cylindres lemniscatiques.*

Physique, mises en coordonnées curvilignes, peuvent cesser d'avoir lieu sur certaines lignes ou certaines surfaces, et que, si l'on n'y prenait attention, les résultats des intégrations seraient entièrement faux.

Dans le Chapitre IV, on trouve les recherches de Sturm sur les équations différentielles linéaires du second ordre publiées dans le premier volume de ce *Journal* (1re série).

Dans le Chapitre V, j'ai exposé la théorie du mouvement vibratoire des membranes; on y doit remarquer principalement la théorie de la membrane de forme elliptique, que j'ai publiée d'abord dans ce *Journal* (t. XIII, 1868).

Le Chapitre VI contient les recherches de Laplace et de Poisson sur la distribution de la chaleur dans une sphère.

Le Chapitre VII est relatif à la distribution de la chaleur dans un milieu indéfini et aux températures du globe terrestre. Je résous le problème le plus général de ce Chapitre par des formules plus simples que celles qu'avait données Poisson.

Dans le Chapitre VIII, j'examine l'équilibre de température de l'ellipsoïde; ce problème a été entièrement résolu par Lamé, mais l'exposition qu'il en a donnée était susceptible de simplifications, qui m'étaient indiquées, d'une part, par les réflexions générales auxquelles m'avait conduit le sujet du Livre et, d'autre part, par les recherches de Jacobi et de M. Liouville sur les coordonnées elliptiques.

Le Chapitre IX, sur le refroidissement d'un ellipsoïde planétaire, m'appartient entièrement. La méthode que j'emploie pourrait facilement être étendue à un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Sur un théorème de Poisson;

PAR M. H. LAURENT.

Poisson, dans le *Journal de l'École Polytechnique* (15e Cahier), a montré que, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ étaient les intégrales d'un problème de Dynamique dont les variables sont $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$, on avait identiquement, en appelant t le temps,

$$\frac{d(\alpha_i, \alpha_j)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d(\alpha_i, \beta_j)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d(\beta_i, \beta_j)}{dt} = 0.$$

On comprend toute l'importance du théorème de Poisson. En effet, si (α_i, α_j) ne se réduit pas identiquement à une constante ou à une combinaison des intégrales déjà trouvées, ce sera une nouvelle intégrale. Les fonctions (α_i, α_j) ne sont pas les seules qui jouissent de cette propriété remarquable de se réduire à des constantes, et j'ai déjà prouvé que le déterminant $\frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)}{D(q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_k)}$ jouissait de la même propriété, ce qui peut servir à déterminer la dernière intégrale quand on connaît les $2k - 1$ autres.

Je vais prouver maintenant que la somme

$$(m) \qquad (\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho) = \sum_{i,j} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho)}{D(q_i, q_j, p_i, p_j)} = \Theta$$

jouit de la même propriété. Je pose, pour abréger,

$$(n)\qquad \begin{cases} \mathrm{R}_{i,j} = \dfrac{\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}{\mathrm{D}(q_i, q_j, p_i, p_j)} = \mathrm{R}_{j,i}, \\ \dfrac{dx_m}{dq_n} = s_n^m, \quad \dfrac{dx_m}{dp_n} = t_n^m. \end{cases}$$

En différentiant la formule (m), on a

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{ij} \mathrm{R}_{i,j},$$

ou

$$\frac{d\Theta}{dt} = \sum_{ij} \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^1}\frac{d}{dt}\frac{dx_1}{dq_i} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^2}\frac{d}{dt}\frac{dx_2}{dq_i} + \ldots;$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{d\Theta}{dt} = \sum_{i,j,\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{dx_\varepsilon}{dq_i} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_j^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{dx_\varepsilon}{dq_j} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_i^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{dx_\varepsilon}{dp_i} + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_j^\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{dx_\varepsilon}{dp_j}\right),$$

ou bien, en ayant égard à la formule suivante, où H est la constante des forces vives,

$$\frac{d}{dt}\frac{dx_\varepsilon}{dq_i} = \left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}, \alpha_\varepsilon\right),$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \sum_{i,j,\varepsilon}\left[\frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_j}, \alpha_\varepsilon\right) + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_i^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \alpha_\varepsilon\right) + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_j^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_j}, \alpha_\varepsilon\right) + \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{dt_j^\varepsilon}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_j}, \alpha_\varepsilon\right)\right].$$

Je dis que le second membre de cette formule est identiquement nul; en effet, il contient deux termes en $\dfrac{d^2\mathrm{H}}{dq_i\,dq_j}$: par exemple, le premier a pour coefficient

$$\sum_\varepsilon \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_i^\varepsilon}\frac{dx_\varepsilon}{dp_j} = 0,$$

l'autre a pour coefficient

$$\sum_\varepsilon \frac{d\mathrm{R}_{ij}}{ds_j^\varepsilon}\frac{dx_\varepsilon}{dp_j} = 0.$$

Les termes en $\frac{d^2 H}{dq_i\, dp_j}$ ont pour coefficients

$$-\sum_{\varepsilon} \frac{d R_{ij}}{d s_i^{\varepsilon}} \frac{d \alpha_{\varepsilon}}{d q_j} \quad \text{et} \quad \sum_{\varepsilon} \frac{d R_{ij}}{d t_i^{\varepsilon}} \frac{d \alpha_{\varepsilon}}{d p_j},$$

c'est-à-dire $-$ R et $+$ R. Leur somme est donc nulle; donc enfin

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0,$$

et, par suite, Θ reste constant pendant toute la durée du mouvement. Il est clair que la démonstration précédente peut être généralisée. Et si l'on pose

$$(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi) = \sum_{ijl} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi)}{D(q_i, q_j, q_l, p_i, p_j, p_l)},$$

la quantité $(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi)$ sera encore constante pendant toute la durée du mouvement. On arrive ainsi, comme cas particulier, à ce théorème, que le déterminant de toutes les intégrales est une constante.

On peut s'assurer par un calcul direct que la somme de déterminants dont je viens de parler ne se réduit pas identiquement à une constante ou à une combinaison d'intégrales déjà trouvées. Prenons, par exemple, les équations canoniques

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= x, & \frac{dx}{dt} &= x', \\ \frac{dy'}{dt} &= y, & \frac{dy}{dt} &= y', \\ \frac{dz'}{dt} &= z, & \frac{dz}{dt} &= z'. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

$$(\mathrm{P}') \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= x^2 - x'^2, & \gamma &= zx' - xz', \\ \beta &= y^2 - y'^2, & \delta &= yz' - zy' \end{aligned} \right.$$

sont des intégrales; et si l'on forme

$$\sum \frac{D(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{D(x, x', y, y')},$$

on trouve

$$(xz - x'z')(yz - y'z') = \text{const.} = \theta.$$

Or je dis que θ n'est pas une fonction de α, β, γ, δ, ou, si l'on veut, je dis qu'en faisant $\gamma = 0$, $\delta = 0$, on ne peut pas calculer θ en fonction de α et β. En effet, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ donnent $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \lambda$, et l'on a

$$\alpha = x^2(1 - \lambda^2), \quad \beta = y^2(1 - \lambda^2),$$
$$\theta = xyz^2(1 - \lambda^2)^2;$$

$(1 - \lambda)$ peut s'éliminer, et l'on aurait

$$\alpha\beta z^2 = \theta xy, \quad \beta x^2 = \alpha y^2.$$

Si l'on différentie ces équations en laissant α et β constants, on doit avoir $d\theta = 0$. Or on a

$$2\alpha\beta z dz = \theta dxy + xy d\theta, \quad \beta x dx = \alpha y dy;$$

$d\theta$ ne peut pas être identiquement nul; donc, enfin, θ ne peut être fonction de α et β.

C. Q. F. D.

Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre;

PAR J. GRAINDORGE,
Docteur ès sciences, Répétiteur à l'Université de Liége.

Dans un Mémoire publié en 1784 [*], Monge a considéré l'équation du second ordre

$$(1) \qquad Rr + Ss + Tt = U,$$

R, S, T, U étant des fonctions de x, y, z, p, q.

Il énonce le théorème suivant :

Soient

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2$$

deux intégrales satisfaisant aux équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} dy - m\,dx &= 0, \\ R\,m\,dp + T\,dq - U\,m\,dx &= 0, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles m est l'une des racines de l'équation

$$(3) \qquad Rm^2 - Sm + T = 0;$$

l'équation

$$f_1 = \varphi(f_2)$$

sera une intégrale première de la proposée.

Si donc m' et m'' sont les deux racines de l'équation (3), on obtient

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784, p. 128.

deux intégrales du premier ordre de l'équation (1), et l'on peut facilement en déduire l'intégrale générale.

Monge n'a pas appliqué sa méthode, ni aucun géomètre après lui, aux cas particuliers où l'une quelconque, ou bien deux des dérivées du second ordre r, s, t ne figurent pas dans la proposée. Il n'est cependant pas difficile d'éviter, par un artifice bien simple, les résultats illusoires que présente alors le procédé de Monge. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

1° Si $R = 0$, l'équation (1) devient

$$Ss + Tt = U. \tag{4}$$

Dans ce cas, l'équation (3), qui donne, en général,

$$m = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}, \tag{5}$$

se réduit à la suivante :

$$Sm - T = 0.$$

On en déduit

$$m = \frac{T}{S}.$$

Cette valeur de m nous donne, pour les équations (2),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T}{S}, \quad Tdq - Udy = 0. \tag{6}$$

Quant à la seconde valeur de m, elle est, comme on le sait, infinie, et donne des résultats illusoires.

Mais on peut transformer les équations (2) de la manière suivante. Observons d'abord que, pour $m = \infty$, on a

$$\frac{1}{m} = \frac{dx}{dy} = 0, \quad \text{ou} \quad dx = 0.$$

En outre, de (5) on tire, pour la valeur correspondante,

$$Rm = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2},$$

et pour $R = 0$, il vient

$$\lim Rm = S.$$

On a ainsi le nouveau système

$$(7) \qquad dx = 0, \quad S\,dp + T\,dq - U\,dy = 0.$$

2° Lorsque $T = 0$, l'équation (1) devient

$$(8) \qquad Rr + Ss \mp U.$$

On a alors, d'après (3),

$$m = 0, \quad m = \frac{S}{R}.$$

De la valeur $m = \frac{S}{R}$, on déduit

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{S}{R}, \quad S\,dp - U\,dy = 0.$$

La valeur $m = 0$ donne

$$dy = 0,$$

et la seconde des équations (2) est illusoire.

Mais de

$$m = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R},$$

on conclut

$$\frac{T}{m} = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2};$$

en faisant $T = 0$, on a

$$\lim \frac{T}{m} = S.$$

La seconde équation (2) donne alors

$$R\,dp + S\,dq - U\,dx = 0,$$

et l'on a le système

$$(10) \qquad dy = 0, \quad \mathrm{R}dp + \mathrm{S}dq - \mathrm{U}dx = 0.$$

3° Lorsque $\mathrm{R} = 0$, $\mathrm{T} = 0$, l'équation (1) se réduit à la suivante :

$$(11) \qquad \mathrm{S}s = \mathrm{U}.$$

Les deux systèmes compris dans (2) deviennent alors

$$(12) \qquad \begin{cases} dx = 0, & \mathrm{S}dp - \mathrm{U}dy = 0, \\ dy = 0, & \mathrm{S}dq - \mathrm{U}dx = 0. \end{cases}$$

Remarque. — On pourrait d'ailleurs trouver ces deux relations, ainsi que les précédentes, en remplaçant s par sa valeur déduite des équations

$$(13) \qquad \begin{cases} dp = rdx + sdy, \\ dq = sdx + tdy. \end{cases}$$

Tirant s de la première, et substituant dans (11), on a

$$\mathrm{S}dp - \mathrm{S}rdx = \mathrm{U}dy;$$

d'où

$$\mathrm{S}dp = \mathrm{U}dy,$$
$$dx = 0.$$

De même, en substituant dans (11) la valeur de s tirée de la seconde équation (13), il vient

$$\mathrm{S}dq - \mathrm{S}tdy = \mathrm{U}dx.$$

Par suite,

$$\mathrm{S}dq = \mathrm{U}dx,$$
$$dy = 0.$$

Application. — Soit l'équation du second ordre

$$(14) \qquad pqr - (1 + p^2)s = 0,$$

qui appartient aux surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont situées dans des plans parallèles au plan des zx.

Cette équation est de la forme (8) : les deux systèmes (9) et (10) nous donnent

$$\text{(I)} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1+p^2}{pq}, \quad dp = 0;$$

$$\text{(II)} \qquad dy = 0, \quad pq\,dp - (1+p^2)\,dq = 0.$$

Or du système (II) on tire facilement

$$y = \text{const.},$$
$$\beta\sqrt{1+p^2} = q.$$

Par conséquent, l'équation

$$(15) \qquad q = \sqrt{1+p^2}\,f'(y)$$

sera une première intégrale intermédiaire de l'équation (14).

D'un autre côté, le système (I) nous donne

$$dp = 0 \quad \text{ou} \quad p = \alpha.$$

En combinant cette dernière équation avec les relations

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\alpha^2}{\alpha q},$$
$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on obtient

$$\alpha\,dz + dx = 0;$$

d'où

$$\alpha z + x = \beta.$$

Par suite, l'équation

$$(16) \qquad x + pz = \varphi(p),$$

sera une seconde intégrale intermédiaire de (14).

Il nous reste maintenant à intégrer l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

ce que l'on pourrait faire en prenant y et p pour variables indépendantes [*].

Mais, en appliquant la méthode de Jacobi, on peut se contenter de la première intégrale intermédiaire (15).

En effet, on en déduit le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy}{1} = \frac{dx}{\dfrac{-pf'(y)}{\sqrt{1+p^2}}} = \frac{dp}{0}.$$

On a donc, d'après cela,

$$p = a_1;$$

par suite,

$$q = \sqrt{1+a_1^2}\, f'(y).$$

Remplaçant p, q par ces valeurs dans

$$dz = pdx + qdy,$$

il vient

$$dz = a_1 dx + \sqrt{1+a_1^2}\, f'(y)dy;$$

d'où

$$z - \varphi(a_1) = a_1 x + \sqrt{1+a_1^2}\, f(y).$$

L'intégrale générale s'obtient alors en éliminant a_1 entre les deux équations

$$z - \varphi(a_1) - a_1 x - \sqrt{1+a_1^2}\, f(y) = 0,$$

$$x + \varphi'(a_1) + \frac{a_1 f(y)}{\sqrt{1+a_1^2}} = 0.$$

Ce sont les deux équations auxquelles M. Serret est arrivé.

---

[*] Voir le *Traité de Calcul intégral* de M. Serret, p. 663.

En appliquant les résultats que je viens d'exposer ci-dessus aux équations considérées par Laplace (*), on parvient très-rapidement aux formules que l'auteur de la *Mécanique céleste* a trouvées par de nombreuses transformations.

---

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1773.

FIN DU TOME DIX-SEPTIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

QA
1
J684
sér.2
t.17
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY